**Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione**

# QUADERNI SNV

# N. 1-MAT

## Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2010/11
## Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica
## Classe seconda – Scuola secondaria di II grado

**Michele Impedovo, Aurelia Orlandoni, Domingo Paola**

## Introduzione

Un'analisi delle risposte al test, a nostro avviso, mette in luce alcuni interessanti aspetti legati ai processi di insegnamento-apprendimento della matematica in atto nel nostro Paese.

Questo lavoro propone, nella prima parte, alcune considerazioni sintetiche in merito agli aspetti positivi e alle criticità che ci sembrano emergere e, nella seconda parte, considerazioni analitiche su ogni singola domanda.

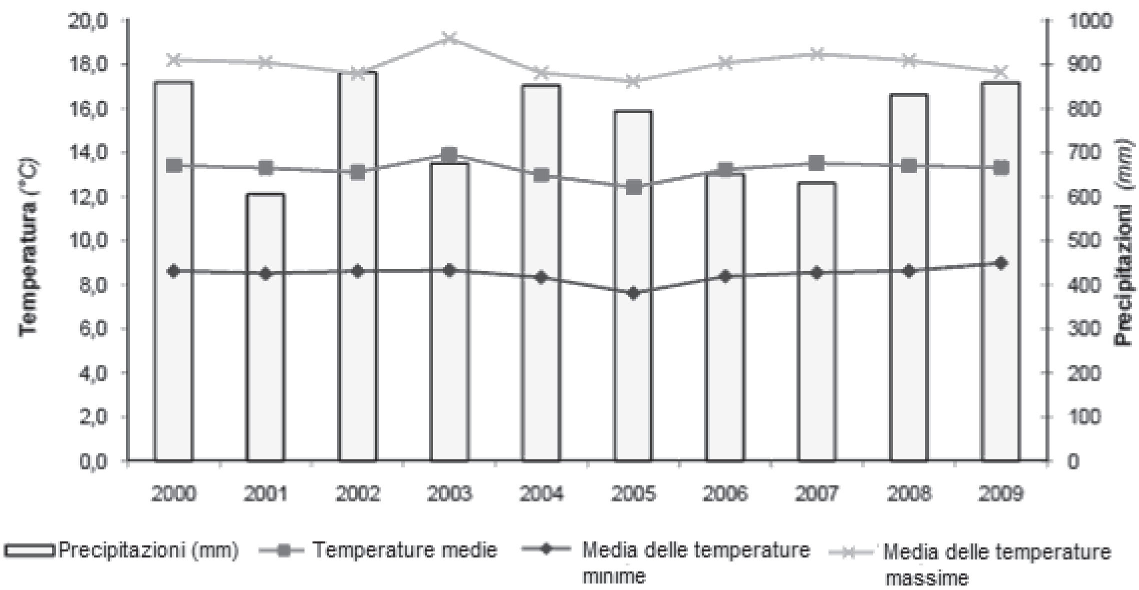
## Prima parte: considerazioni sintetiche

**Riflessioni generali sui risultati: aspetti positivi.**

Un primo dato positivo riguarda le competenze di lettura e interpretazione di un grafico o di una tabella e le capacità che gli studenti mostrano nel collegare le due forme di rappresentazione. Tutte le domande che presentano grafici, tabelle, o entrambe le rappresentazioni (D1, D6, D12, D20), ottengono buone e, in alcuni casi, ottime percentuali di risposte corrette. Ciò suggerisce che la pratica didattica su questi temi (in particolare la lettura di un grafico) sia di buon livello.

Per esempio, il grafico seguente, presentato in D12, nonostante presenti una certa complessità informativa, viene analizzato e sintetizzato dagli studenti con buona precisione.

**Figura 1. Media annua della temperatura media, massima e minima giornaliera e precipitazioni totali annue in Italia. Anni 2000-2009** *(temperatura in gradi Celsius e precipitazione in millimetri)*



Se è vero che tali competenze vengono costruite soprattutto nella scuola secondaria di I grado, i risultati del test suggeriscono che le competenze di lettura di un grafico siano relativamente stabili, una volta acquisite.

Anche le rappresentazioni geometriche sono in generale correttamente interpretate (D9 a, D30 e, parzialmente, anche D17), rafforzando l'impressione precedente.

**Riflessioni generali sui risultati: criticità emerse.**

I risultati relativi a domande che richiedono competenze di **calcolo** (per esempio D10, D15, D16, D21, D22, D25, D26) possono apparire tanto più deludenti quanto maggiori sono le risorse e il tempo effettivamente dedicati nellla scuola secondaria alle attività di calcolo, sia numerico sia algebrico. Per esempio, le percentuali di risposte corrette a domande come *Qual è la metà di* $(1/2)^{50}$*?* (D10), oppure *Qual è il numero che aumentato del 20% dà 300?* (D25) sono tra le più basse dell'intero test (circa 12%).

Nel caso della D16, solo poco più del 20% degli studenti riconosce che $10^{37}+10^{38} = 11 \cdot 10^{37}$, nonostante le altre opzioni possibili dovrebbero risultare palesemente scorrette in base a semplici e immediate considerazioni sugli ordini di grandezza dei numeri in gioco.

Anche di fronte alla richiesta di riconoscere che il polinomio $x^4 - 16$ è divisibile per $x+2$ (D22), o che dividere per 0,2 equivale a moltiplicare per 5 (D15) la bassa percentuale di risposte corrette segnala criticità sorprendenti se si considerano le risorse messe in gioco nella prassi didattica per conseguire buone competenze di calcolo.

Dall'analisi delle risposte sembra emergere che le attività di calcolo siano viste dagli studenti in larga parte come semplice manipolazione simbolica fine a se stessa; tale manipolazione, non solo sembra essere condotta a livello puramente sintattico, ma addirittura sembra inibire qualunque capacità di controllo semantico.

Per esempio, è possibile che in D16, se la domanda avesse fornito (anziché l'espressione numerica $10^{37}+10^{38}$) l'espressione simbolica $x^{37}+x^{38}$, un numero maggiore di studenti avrebbe raccolto $x^{37}$ a fattor comune, trovando così l'espressione equivalente corretta $x^{37}(1 + x)$. Gli studenti non sembrano essere in grado di trasferire in un ambito più specifico il procedimento di raccolta a fattor comune, tipico della pratica didattica messa in opera nell'insegnamento-apprendimento del calcolo letterale. Il calcolo simbolico, quindi, lungi dal generalizzare le proprietà dei numeri, sembra essere visto, paradossalmente, come un campo di esperienza sintattica recintato e non comunicante con gli oggetti numerici. In altri termini non sembra che gli studenti siano in grado di usare l'**algebra** come strumento di pensiero.

Sempre in termini di calcolo, è curioso osservare che alla domanda D19, in cui si chiede un valore medio tema al quale viene certamente dedicato minor tempo nella prassi didattica), il cui calcolo è relativamente complesso, una percentuale significativamente più ampia (circa il 60%) risponde correttamente; forse dipende dal fatto che in questo caso non si tratta semplicemente di effettuare un calcolo, ma di riconoscere la procedura di calcolo adatta ad affrontare la situazione e quindi, in un certo senso, di progettarla.

Le domande in cui si chiede di valutare se una certa proposizione è **vera**, oppure di fornire **controesempi** (D4 e D14 riguardano il valore di verità di proposizioni quantificate universalmente: "per ogni numero naturale …") mettono in evidenza che, per gli studenti, non è affatto naturale avviare una semplice esplorazione per ottenere la risposta corretta. Per esempio, se si chiede di fornire un controesempio a "$2^n+1$ è un numero primo" ci si aspetterebbe un'**esplorazione** empirica come la seguente

| $n$ | $2^n+1$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 9 |
| ... | |

che fornisce quasi subito un controesempio. Invece quasi il 40% non risponde e quasi il 20% risponde in modo errato. È possibile che l'attività di validazione di una congettura non rappresenti una pratica didattica usuale, soprattutto nella scuola secondaria di II grado; se le cose stanno davvero in questi termini, poiché l'attività di esplorazione di una congettura rappresenta una fase molto importante nel processo di costruzione del pensiero scientifico, allora auspichiamo un rafforzamento delle attività e dei processi didattici finalizzati a tale competenza.

Un'attenzione particolare meritano le domande in cui si chiedono una **stima numerica**, un'**approssimazione**, un **ordine di grandezza** (per esempio D5, D16, D23): le basse percentuali di risposte corrette suggeriscono di prestare un'attenzione maggiore al **senso del numero**, cioè alla capacità di controllare il risultato di un calcolo mediante l'ordine di grandezza che esso può assumere; è opinione di molti ricercatori che non sia possibile coltivare competenze di calcolo algebrico-simbolico in studenti che non abbiano dapprima consolidato il senso del numero. Per esempio, in D16, tre risposte su quattro avrebbero potuto essere immediatamente scartate, perché esprimono un ordine di grandezza completamente diverso da quello corretto: gli studenti avrebbero quindi dovuto immediatamente riconoscere che una sola delle opzioni proposte era plausibile. Oppure, in D15, avrebbe dovuto essere naturale, per uno studente di scuola secondaria, riconoscere che dividere un numero (positivo) per un numero compreso tra 0 e 1 equivale a moltiplicarlo per un numero maggiore di 1 e, quindi, ad aumentarlo. Le prime due opzioni, quindi, avrebbero potuto essere immediatamente scartate. Invece raccolgono quasi il 70% delle risposte.

Riteniamo importante segnalare una certa difficoltà con cui vengono gestite dagli studenti le **percentuali** (vedere per esempio D25 e D27). Può essere che la scuola non si impegni a sufficienza su questo terreno; in particolare è possibile che non si presti particolare attenzione al passaggio dal *modello additivo* (una grandezza $x$ che aumenta del 20% diventa $x+20\%x$, mentre se diminuisce del 20% diventa $x - 20\%x$) al *modello moltiplicativo*:

$x \rightarrow 1{,}2x$

$x \rightarrow 0{,}8x$

A noi sembra che la rappresentazione moltiplicativa delle variazioni percentuali riesca in modo più semplice a catturare il risultato, in particolare se, come in D25, si chiede il procedimento inverso, ossia risalire dal prezzo aumentato al prezzo base: è sufficiente, per *tornare indietro*, dividere per 1,2. In ogni caso il modello moltiplicativo è indispensabile in problemi di aumenti percentuali ripetuti: una grandezza che ogni giorno, per 5 giorni, aumenta del 20% rispetto al valore del giorno precedente è descritta, in modo relativamente semplice, dalla relazione funzionale $x \rightarrow 1{,}2^5\, x$. Si tratta non solo di impegnarsi maggiormente sulle percentuali, ma di gettare anche le basi per i modelli di crescite e decrescite esponenziali.

L'analisi delle risposte ad alcune domande in cui si chiedono semplici modelli matematici, in particolare **modelli lineari** (D8; D11; D13; D24; D27), mostra una certa difficoltà, da parte degli studenti, a utilizzare il linguaggio matematico per esprimere relazioni tra grandezze.

Analizziamo per esempio la domanda D13b:

*In un test di 25 domande ogni risposta esatta è valutata con 4 punti e ogni risposta errata o mancante con –2 punti. Qual è il punteggio totale p se si indica con n il numero di risposte esatte?* L'espressione corretta, $p = 4n - 2(25 - n)$, viene indicata solo dall'8% degli studenti; si tratta del peggior risultato di tutto il test. Questo è tanto più deludente quanto più si ritiene che tale competenza, cioè rappresentare la soluzione di un problema mediante un modello matematico (in questo esempio mediante una relazione funzionale tra le grandezze *p* e *n*), rappresenti in definitiva uno degli obiettivi didattici più importanti dell'attività di insegnamento-apprendimento della matematica nella scuola secondaria; un obiettivo al quale molte altre competenze (per esempio quelle di calcolo) dovrebbero essere dedicate e in qualche modo asservite. Potremmo allora concludere sostenendo che ai nostri studenti, sia in termini di competizione nel mondo del lavoro, sia di partecipazione consapevole alla vita sociale del Paese, più che la capacità di *manipolazione* sintattica di formule, la nostra scuola deve fornire la capacità di *produrre* formule, il cui valore semantico abbia lo scopo di descrivere relazioni funzionali tra grandezze.

**Riflessioni sui risultati scorporati per macro aree regionali[1] e per tipologia di istituti**

La maggior parte delle riflessioni che seguono fanno riferimento alle domande a scelta multipla (non complessa) e a risposta aperta, che costituiscono la tipologia più utilizzata nella prova e i cui risultati possono essere analizzati singolarmente.

**Le omissioni**

Nelle domande a **scelta multipla** le omissioni sono sostanzialmente sempre basse; soltanto in D8 e in D24 superano il 10%. Come visto in precedenza, si tratta di domande in cui gli studenti devono costruire o scegliere modelli matematici. Per quanto riguarda le omissioni, non vi sono sostanziali differenze nei risultati scorporati per tipologia di Istituti e per area geografica.

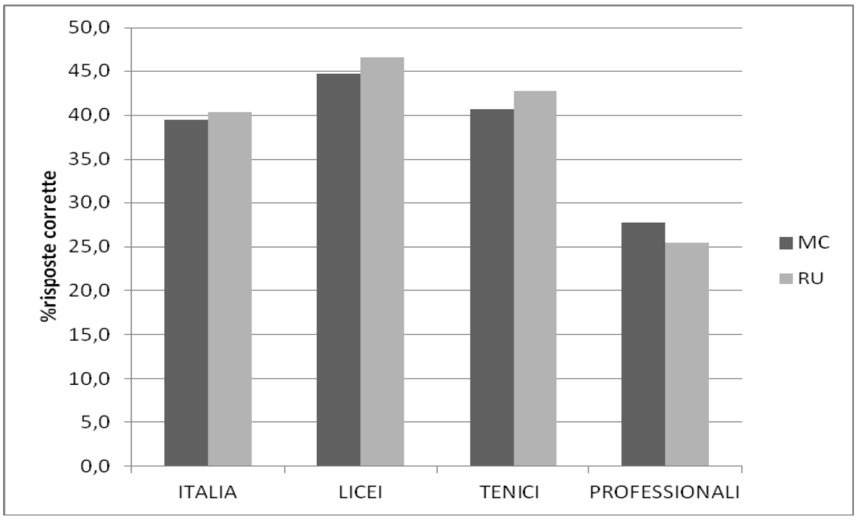
Diversa è la situazione se si considerano le domande a **risposta aperta**: qui il tasso di omissioni è decisamente più alto, con una media nazionale di circa il 20%. Inoltre si registrano significative differenze fra gli Istituti Professionali, che hanno una media di omissioni superiore al 25%, e le altre tipologie di istituti. In particolare, nel caso della D4 che, come visto in precedenza, richiede la costruzione di un controesempio, negli Istituti Professionali si registra un 67% di omissioni.
Anche dal punto di vista geografico le differenze sono rilevanti; nelle regioni del Sud, in diverse domande, il tasso di omissioni supera il 30%.

[1] Le macroaree geografiche sono così articolate: *Nord-Ovest* (Valle d'Aosta, Piemonte, Liguria, Lombardia), *Nord-Est* (Provincia autonoma di Bolzano, Provincia autonoma di Trento, Veneto, Friuli-Venezia Giulia, Emilia-Romagna), *Centro* (Toscana, Umbria, Marche, Lazio), *Sud* (Abruzzo, Molise, Campania, Puglia) *Sud e Isole* (Basilicata, Calabria, Sicilia, Sardegna).

| | ITALIA | NORD-OVEST | NORD-EST | CENTRO | SUD | SUD E ISOLE |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Omissioni nelle domande a risposta aperta | **21,4%** | **16,4%** | **15,3%** | **22,8%** | **24,2%** | **28,0%** |

**Le risposte corrette**

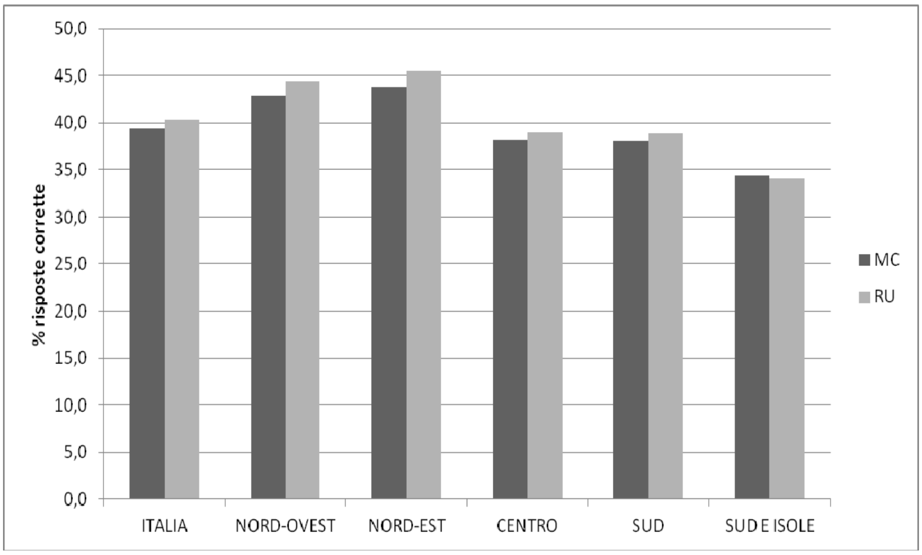
Un confronto **per tipologia di Istituto** mostra che la percentuale delle risposte corrette date dagli studenti degli Istituti tecnici è inferiore di circa il 5% rispetto a quella registrata nei Licei; nei Professionali la differenza sale a circa il 20% sia nelle domande a scelta multipla (MC) che in quelle a risposta aperta univoca (RU).



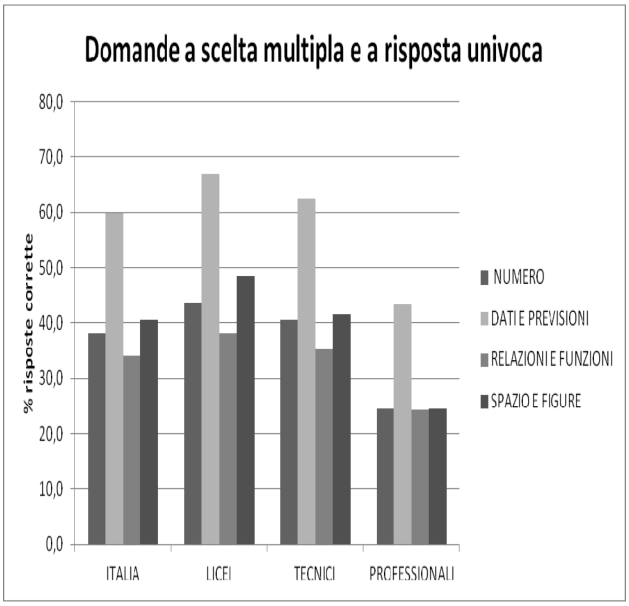

Se si analizzano i risultati **per area geografica**, si osserva che, rispetto alla media nazionale delle risposte corrette:

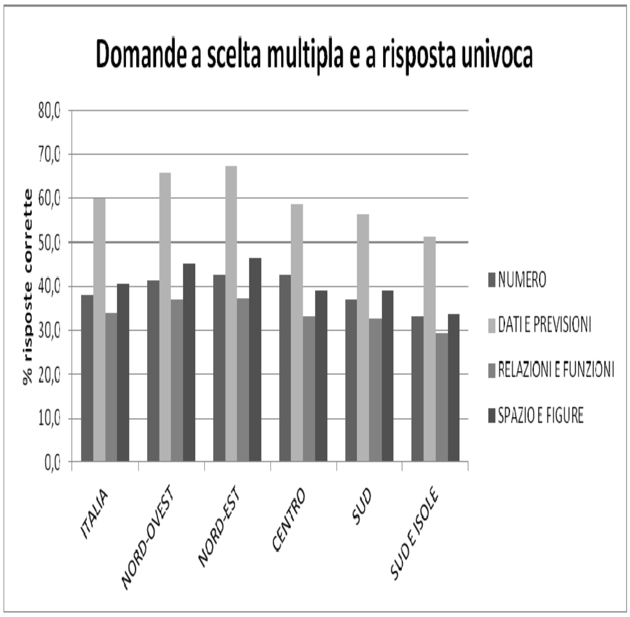
a) nel Sud e Isole si registra circa un 5% in meno di risposte corette;
b) nel Nord-Ovest e Nord-Est si registra circa un 4%-5% in più di risposte corrette;
c) il Centro è in linea con la media nazionale;
d) il Sud è leggermente al di sotto della media italiana

Anche in questo caso non vi sono sostanziali differenze fra domande a scelta multipla (MC) e domande a risposta aperta univoca (RU).




La **suddivisione per ambito** (Numero, Dati e previsioni, Relazioni e funzioni, Spazio e figure) dei quesiti a scelta multipla e a risposta aperta univoca, mostra che nell'ambito Dati e previsioni, nonostante sia quello in cui sono meno presenti pratiche didattiche consolidate, si sono registrati i risultati migliori. Non si notano invece sostanziali differenze fra gli altri tre. Colpisce in particolare che l'andamento dei risultati nei diversi ambiti non si diversifica se si scorporano i dati per area geografica o per tipologia di Istituto.



## Seconda parte: considerazioni analitiche[2]

I quesiti sono distribuiti negli ambiti secondo la tabella seguente:

| **Ambito** | **Numero di domande** | **Numero di Item**[3] |
|---|---|---|
| Numeri | 10 | 14 |
| Spazio figure | 6 | 13 |
| Dati e previsioni | 5 | 14 |
| Relazioni e funzioni | 9 | 14 |
| **Totale** | **30** | **55** |

**Tabella della suddivisione degli item in relazione ad ambiti e processi**

| Processi/Ambiti | Numeri | Spazio e figure | Dati e Previsioni | Relazioni e funzioni | **TOT** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...) | 3 | 2 | | 1 | **6** |
| 2. Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...) | 2 | 4 | 1 | 2 | **9** |
| 3. Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...) | 3 | | 3 | 3 | **9** |
| 4. Risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di | | 3 | | 6 | **9** |

[2] a cura di Michele Impedovo, Aurelia Orlandoni, Domingo Paola a partire dal lavoro già pubblicato a cura di G. Bolondi, R. Garuti, A. Orlandoni. D. Paola, L. Tomasi.

[3] Una domanda può essere composta da più item, come nel caso di domande a scelta multipla complessa del tipo Vero o Falso. L'attribuzione di un eventuale punteggio parziale sarà definita in sede di analisi dei dati complessivi.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,…) | | | | | |
| 5. Riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e utilizzare strumenti di misura (individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, stimare il risultato di una misura,…) | 3 | | | 1 | **4** |
| 6. Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...) | 2 | | | 1 | **3** |
| 7. Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...) | 1 | | 10 | | **11** |
| 8. Riconoscere le forme nello spazio (*riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, …).* | | 4 | | | **4** |
| **TOTALE** | **14** | **13** | **14** | **14** | **55** |

Di seguito viene proposta un’analisi delle riposte ai diversi quesiti che riporta, nell’ordine:

- il testo del quesito;

- la percentuale (sul campione italiano) delle risposte fornite alle varie opzioni;
- l'ambito e i processi facendo riferimento al quadro teorico delle prove SNV pubblicato sul sito INVALSI;
- le competenze di base a conclusione dell'obbligo di istruzione, come riportate nella parte relativa all'Asse matematico del Decreto 22 agosto 2007: *Regolamento recante norme in materia di adempimento dell'obbligo di istruzione*;
- la risposta corretta, in alcuni casi con diversi procedimenti risolutivi e con qualche commento di carattere didattico.

È importante sottolineare che la classificazione proposta è solo indicativa e non deve rappresentare un vincolo per l'interpretazione del risultato: in matematica una domanda coinvolge in genere diversi ambiti, e la risposta richiede processi di diversa natura. Seguendo la prassi internazionale, abbiamo indicato l'ambito e il processo *prevalenti*, tenendo presente che spesso la scelta di un particolare distrattore può indicare difficoltà o lacune in altri ambiti o in altri processi.

**D1. Nella tabella che vedi sono riportati i dati relativi alla distribuzione di alunni e insegnanti nella scuola secondaria di primo grado in Italia.**

| Aree geografiche | Scuole | Classi | Alunni (compresi i ripetenti) | | Ripetenti | | Insegnanti |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Maschi e femmine | Femmine | Maschi e femmine | Femmine | |
| **ITALIA** | 7939 | 82446 | 1727339 | 826869 | 51407 | 16199 | 212041 |
| **Nord** | 3381 | 33131 | 711292 | 339508 | 19615 | 5679 | 86312 |
| **Centro** | 1358 | 14656 | 312700 | 150098 | 8066 | 2508 | 36570 |
| **Sud** | 3200 | 34659 | 703347 | 337263 | 23726 | 8012 | 89159 |

**Sulla base dei dati in tabella, indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

| | | Vero | Falso |
|---|---|---|---|
| **a.** | Nel Nord gli alunni maschi sono meno delle femmine | ☐ | ☐ |
| **b.** | In Italia il rapporto insegnanti/classi è inferiore a 3 | ☐ | ☐ |
| **c.** | Nel Sud ci sono mediamente più di 10 classi per scuola | ☐ | ☐ |

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Vero | Falso |
| D1_a | 0,8 | 10,7 | 88,5 |
| D1_b | 3,7 | 74,9 | 21,4 |
| D1_c | 2,1 | 86,7 | 11,2 |

**AMBITO PREVALENTE :** Dati e Previsioni

**PROCESSO PREVALENTE**

Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (*descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...*).

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi

**RISPOSTE CORRETTE:**

**Domanda D1_a: Falso**

La lettura della tabella consente di osservare che al Nord gli allievi (maschi e femmine) sono più di 700.000, mentre le femmine sono circa 340.000, cioè meno della metà. Quindi i maschi devono essere più della metà ed è quindi falso che al Nord gli alunni maschi siano meno delle femmine.

Naturalmente si potrebbe rispondere anche eseguendo la una sottrazione 711292 – 339508 che restituisce il numero di studenti maschi al Nord, ossia 371784, che è maggiore del numero delle femmine.

Per rispondere con un rapido calcolo mentale è utile sapere approssimare per difetto 711.292 con 700.000 e 339.508 per eccesso con 340.000. Queste approssimazioni consentono di stabilire immediatamente che nel Nord gli allievi maschi sono più delle femmine.

**Domanda D1_b: Vero**

Basta infatti notare che

a) 240000 / 80000 = 3;
b) gli insegnanti della scuola secondaria di I grado, in Italia sono 212.041 (meno di 240000) mentre le classi sono 82.446 (più di 80.000)

per concludere che il rapporto insegnanti/classi è inferiore a 3.

Naturalmente si può rispondere anche ricorrendo alla calcolatrice:

$$\frac{212041}{82446} \approx 2{,}57 < 3$$
.

**Domanda D1_c: Vero**

Dalla tabella si legge che le classi sono 34659 e le scuole sono 3200.

Quindi le classi (circa 35000) sono più di 10 volte 3200.

Naturalmente si può rispondere anche ricorrendo alla calcolatrice:

$$\frac{34659}{3200} \approx 10{,}83 > 10$$
.

Quindi è vero che nel Sud ci sono mediamente più di 10 classi per scuola.

**COMMENTO**

Per rispondere correttamente agli item della domanda D1 è necessario essere in grado di leggere una tabella e di eseguire semplici operazioni (sottrazioni e rapporti). È possibile evitare l'uso della calcolatrice se si è in grado di effettuare approssimazioni opportune dei numeri in gioco.

Le risposte corrette fornite ai tre item sono nettamente maggiori di quelle errate e il numero di risposte mancanti si può considerare trascurabile.

D1.b è, dei tre, l'item con il minor numero di risposte corrette e il maggior numero di risposte non date: potrebbe essere un'indicazione per rafforzare nella prassi didattica il fatto che il valore numerico di un rapporto aumenta se aumenta il numeratore o se diminuisce il denominatore; la padronanza di questo fatto è davvero molto importante nello sviluppo di diversi settori della matematica e in generale della preparazione scientifica degli allievi.

**D2. La corriera passa alle 6:30 alla fermata dove sale Giorgio. Nel 40% dei casi è in orario, nel 50% dei casi ha un ritardo di 5 minuti e nei rimanenti casi ha un ritardo di 10 minuti. Se Giorgio arriva alla fermata alle 6:34, che probabilità ha di prendere la corriera?**

- ☐ A. 10%
- ☐ B. 40%
- ☐ C. 50%
- ☐ D. 60%

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D2 | 1,7 | 16,1 | 11,9 | 25,5 | 44,8 |

**AMBITO PREVALENTE**

Dati e Previsioni

**PROCESSO PREVALENTE**

Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (*descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni,...*).

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

L’argomento non è esplicitamente richiamato ma si tratta di una competenza richiesta agli studenti al termine del primo ciclo e che quindi si suppone acquisita stabilmente. In questo senso il quesito può costituire un esempio di continuità verticale.

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D2: D**

Infatti la probabilità che la corriera ritardi di 5 minuti è del 50% e la probabilità che arrivi con 10 minuti di ritardo è del 10%

Se Giorgio arriva alle 6:34 ha quindi la probabilità di 50%+10%=60% di prendere la corriera perché riesce a prenderla sia nel caso in cui la corriera ritardi di 5 minuti, sia che ritardi di 10 minuti.

Si potrebbe anche rispondere pensando alla probabilità che la corriera *non* arrivi in orario. La probabilità che la corriera sia in orario è del 40%. Poiché il ritardo di Giorgio gli consentirebbe di prendere ugualmente la corriera che non arriva in orario, la probabilità di prendere la corriera è del 60%.

**COMMENTO**

La risposta corretta richiedeva un’attenta lettura del testo. Fra i tre distrattori, ossia le opzioni a), b) e c), che riportano, rispettivamente i numeri 10, 40 e 50 che compaiono nel testo del quesito, gli studenti sono stati particolarmente attratti dall’opzione c). Non è strano, visto che si tratta della percentuale di casi in cui la corriera arriva in ritardo e che una lettura superficiale o affrettata può portare a identificare il ritardo come causa del perdere la corriera. In ogni caso la risposta corretta è quella che ottiene il maggior numero di scelte, una percentuale che si aggira intorno al 45%.

**D3.** **Un triangolo ha un lato di 6 cm e uno di 10 cm.**
**Quale tra le seguenti <u>non</u> può essere la misura della lunghezza del terzo lato?**

☐ A. 6,5 cm

☐ B. 10 cm

☐ C. 15,5 cm

☐ D. 17 cm

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D3 | 5,0 | 24,0 | 11,1 | 10,9 | 49,0 |

**AMBITO PREVALENTE**

Spazio e Figure

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture*...)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D3: D**

In un triangolo la misura di un lato deve essere minore della somma delle misure degli altri due lati.

In questo caso la somma delle misure dei due lati noti è 16 cm.

Quindi l’unica misura che non si può accettare fra quelle proposte è 17 cm.

**COMMENTO**

Per rispondere correttamente era sufficiente applicare la disuguaglianza triangolare, proprietà fondamentale a cui però non sempre gli studenti danno la giusta rilevanza, probabilmente perché la considerano scontata. Interessante notare che le risposte errate non si distribuiscono uniformemente sulle opzioni a), b) e c), ma cadono soprattutto sull'opzione a). Il perché non è chiaro, anche se potrebbe dipendere dall'immagine che gli studenti in genere si costruiscono di triangolo isoscele: un "prototipo" in cui l'angolo compreso fra i due lati uguali è non solo acuto, ma minore di 60°, in quanto la cosiddetta *base* del triangolo isoscele è minore dei due lati fra loro uguali. Il triangolo dell'opzione a) ha due lati "quasi uguali" e quindi dovrebbe comportarsi all'incirca come il prototipo del triangolo isoscele: il terzo lato non può essere di 10 cm, perché deve essere minore degli altri due.

Un'altra possibile spiegazione mette in causa una possibile carenza nella "raffigurazione mentale" del problema: il triangolo 6, 6.5, 10 non fa parte di alcuna classificazione canonica stabile (e non lascia intravedere una distribuzione angolare nota) e dunque ... non esiste. In altri termini l'errore potrebbe essere veicolato dal fatto che solitamente la scuola non insegna a raffigurare un "triangolo qualsiasi", cioè appunto un triangolo che debba soddisfare la disuguaglianza triangolare, che è una relazione algebrica assai lontana dalla sua raffigurazione geometrica.

**D4.** **Considera l'affermazione: "Per ogni numero naturale $n$, $2^n + 1$ è un numero primo". Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.**

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Errata | Corretta |
| D4 | 38,9 | 18,3 | 42,8 |

**AMBITO PREVALENTE**

Numeri

**PROCESSO PREVALENTE**

Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare,...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D4**: per mostrare che l'affermazione è falsa, basta fornire un solo esempio in cui un numero naturale $n$ è tale che $2^n + 1$ non è un numero primo. Tale esempio viene detto *controesempio*.

Se scegliamo $n$=3, si ottiene $2^3+1=9$, che non è un numero primo.

Analogamente con $n$=5 si ottiene $2^5+1=33$, che non è primo; oppure con $n$=6 si ottiene $2^6+1=65$, che non è primo, ecc.

Naturalmente è sufficiente fornire un solo controesempio.

**COMMENTO**

Il numero di risposte mancanti è rilevante: quasi il 40% non fornisce alcuna risposta a questa domanda. Fra gli studenti che rispondono 2 su 3 circa danno una risposta corretta.

L'elevato numero di risposte mancanti difficilmente dipende dalla ritrosia, già rilevata anche in altre prove, degli studenti nel fornire giustificazioni, spiegazioni, descrizioni di processi risolutivi. In questo caso, infatti, veniva richiesto solo di esibire un esempio che certificasse la falsità dell'affermazione. È quindi probabile che molti degli studenti che non hanno risposto e quelli che hanno sbagliato abbiano incontrato difficoltà con la logica del controesempio.

Per molti studenti l'affermazione è vera in alcuni casi e falsa in altri, perché perdono di vista il quantificatore universale e il suo ruolo strategico nella determinazione della valutazione di verità della proposizione, prestando solo attenzione alla proposizione aperta $2^n + 1$ è primo. Per i diversi valori di $n$ che uno studente può facilmente provare ($n = 0$; $n = 1$; $n = 2$; $n = 4$), $2^n + 1$ è un numero primo. Ciò è sufficiente per concludere che l'affermazione non è falsa, almeno non sempre. Il quesito rischia quindi di non avere senso per molti studenti.

La logica del controesempio può essere compresa, accettata e applicata solo ponendo attenzione sul significato dei quantificatori per la valutazione del valore di verità di una proposizione. D'altra parte questa competenza (importante nella più generale preparazione scientifica degli allievi) va preparata con pazienza e con numerosi esempi e controesempi: non è inusuale ascoltare errori di questo tipo anche nei ragionamenti degli adulti.

Un modo naturale di esplorazione del problema passa per la costruzione della tabella

| n | 2^n+1 |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 9 |
| 4 | 17 |
| 5 | 33 |
| 6 | 65 |
| 7 | 129 |
| 8 | 257 |
| 9 | 513 |
| 10 | 1025 |

Forse quello che manca nella pratica didattica è proprio la fase di esplorazione di un problema, cioè quella fase estremamente istruttiva (ma anche potenzialmente dispersiva) che ha lo scopo di aiutare la comprensione del problema e poi condensare le conoscenze intorno ad una strategia di soluzione. Se la formulazione di D4 fosse stata "Si osservi la tabella e si verifichi se l'affermazione ... è vera" probabilmente il numero di risposte esatte sarebbe stato molto maggiore: l'anello mancante potrebbe essere proprio l'esplorazione.

**D5. L'età della Terra è valutata intorno ai $4{,}5 \times 10^9$ anni. L'Homo Erectus è comparso circa $10^6$ anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?**

- ☐ A. $4{,}5 \times 10^9$ anni
- ☐ B. $3{,}5 \times 10^9$ anni
- ☐ C. $4{,}5 \times 10^6$ anni
- ☐ D. $4{,}5 \times 10^3$ anni

### Risultati in Italia

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D5 | 2,6 | 10,2 | 6,9 | 23,2 | 57,0 |

**AMBITO PREVALENTE**

Numeri

**PROCESSO PREVALENTE**

Sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (*saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura,…*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Analizzare dati e interpretarli usando consapevolmente gli strumenti di calcolo

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D5: A.**

L’informazione che l’età della Terra è $4{,}5\cdot 10^9$ anni equivale a dire che l’età della Terra è maggiore o uguale di $4{,}45\cdot 10^9$ anni e minore di $4{,}55\cdot 10^9$ anni. La stima migliore, fra quelle proposte è quindi $4{,}5\cdot 10^9$ anni. Infatti, sottraendo a un qualunque numero reale compreso fra $4{,}45\cdot 10^9$ e $4{,}55\cdot 10^9$ il numero $10^6$ si ottiene sempre un numero compreso fra $4{,}44\cdot 10^9$ e $4{,}55\cdot 10^9$.

Questa risposta può essere sorprendente, ma bisogna pensare che si tratta di togliere 1 milione di anni da 4,5 miliardi: la sottrazione non incide sulla cifra dei miliardi (4).

**COMMENTO**

La bassissima percentuale di risposte corrette (10% circa, una delle percentuali più basse dell’intero fascicolo) evidenzia le difficoltà che gli studenti hanno a gestire approssimazioni, stime numeriche e determinazioni di ordini di grandezza: si tratta di argomenti poco trattati, nonostante la loro importanza, nella prassi didattica, dove si predilige il lavoro sul calcolo simbolico.

In questo caso si aggiungono alle difficoltà già elencate quelle sulle proprietà delle potenze: l’opzione più scelta, infatti è la c) il cui risultato si ottiene sottraendo all’esponente 9 presente nella stima dell’età della Terra, l’esponente 6, presente nel dato riferito alla comparsa sulla Terra di Homo Sapiens. Questo errore è ben noto agli insegnanti e molti studenti lo commettono, perché non sono abituati a controllare i risultati che ottengono, ma applicano mnemonicamente schemi di calcolo senza verificarne la plausibilità. In questo caso, una maggiore attenzione agli ordini di grandezza, alle stime numeriche, alle approssimazioni, avrebbe portato a scartare immediatamente le opzioni c) e d), che sono state le più scelte.

Probabilmente anche il peso del contratto didattico aiuta a piegare l'esigua percentuale di risposte esatte: bisogna fare una sottrazione tra due numeri e il risultato non può essere il primo numero: $a$□$b$ non può essere uguale ad $a$.

**D6.** **Nel diagramma di figura 1 sono riportati i consumi elettrici (in TWh - terawattora) in Italia dal 2000 al 2005 in funzione della provenienza dell'energia dall'Autoproduzione, dal Mercato libero o dal Mercato vincolato.**

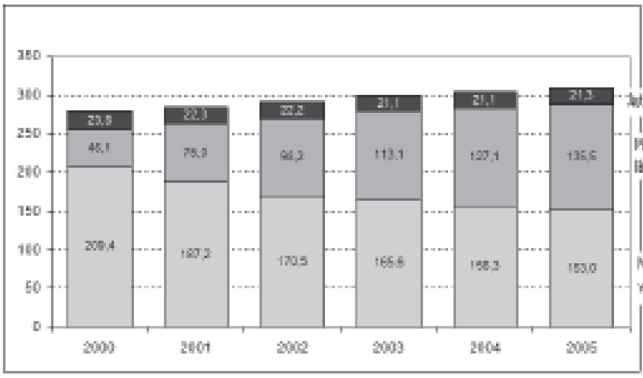



**Figura 1**

**I grafici A, B e C in figura 2 sono stati costruiti con gli stessi dati rappresentati nel diagramma di figura 1.**

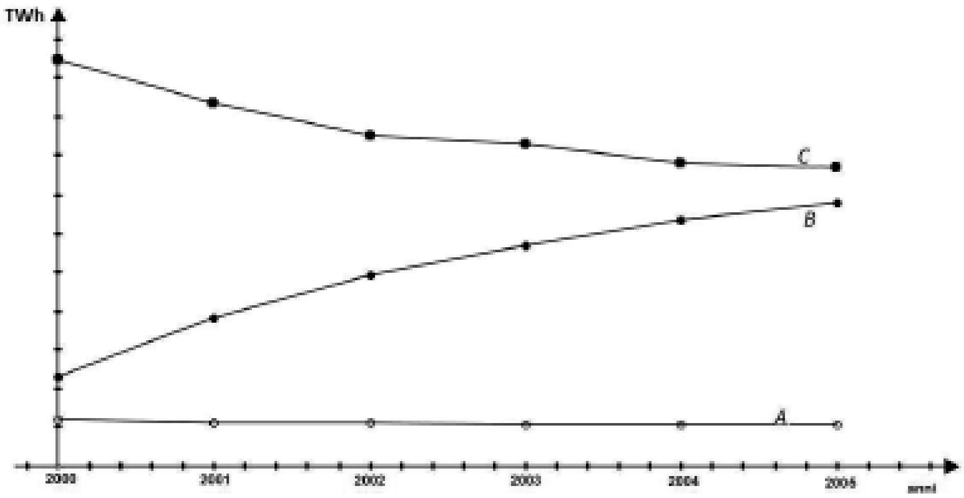



**Figura 2**

**Confronta le figure 1 e 2 e completa le seguenti frasi indicando la provenienza dell'energia (Autoproduzione, Mercato libero, Mercato vincolato).**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Il grafico A corrisponde all'andamento dei consumi di energia proveniente da | ................................ |
| 2. | Il grafico B corrisponde all'andamento dei consumi di energia proveniente da | ................................ |
| 3. | Il grafico C corrisponde all'andamento dei consumi di energia proveniente da | ................................ |

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Errata | Corretta |
| D6_1 | 9,0 | 29,4 | 61,7 |
| D6_2 | 9,3 | 20,1 | 70,7 |
| D6_3 | 9,3 | 28,0 | 62,7 |

**AMBITO PREVALENTE**

Dati e Previsioni

**COMPITO**

Usare e interpretare diverse forme di rappresentazione di dati per rispondere a domande e risolvere problemi

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche.

**RISPOSTE CORRETTE:**

**Domanda D6_1: Autoproduzione**

**Domanda D6_2: Mercato libero**

**Domanda D6_3: Mercato vincolato**

Si tratta di osservare attentamente il grafico a barre (figura 1) e di interpretare quel che si osserva.

La quantità di energia elettrica proveniente dall'autoproduzione è rimasta pressoché invariata (grafico A).

La quantità di energia elettrica proveniente dal mercato libero dell'energia, dal 2000 al 2005, è aumentata (grafico B).

La quantità di energia elettrica proveniente dal mercato vincolato dell'energia, dal 2000 al 2005, è diminuita (grafico C).

Queste osservazioni vanno coordinate con quelle analoghe che si possono fare sui grafici cartesiani, in modo tale da individuare le associazioni corrette.

**COMMENTO**

Per rispondere correttamente gli studenti devono possedere discrete competenze di coordinamento fra due diverse rappresentazioni entrambe appartenenti al registro grafico. Si tratta di associare l'andamento delle altezze dei rettangoli con l'andamento dei grafici cartesiani. Il numero di risposte corrette, in tutti i casi sensibilmente maggiore di quello delle risposte errate, suggerisce che, se questi argomenti vengono trattati, non costituiscono grossi ostacoli. Se è vero che nella prassi didattica dei bienni di molte scuole secondarie di secondo grado, in particolare nei licei, le competenze di lettura dei grafici non hanno ancora il rilievo e l'attenzione che meriterebbero, allora i discreti risultati (non bisogna però dimenticare che il 10% circa non risponde) dipenderebbero soprattutto da quanto svolto dagli studenti nella scuola secondaria di primo grado, il che suggerisce che le competenze di lettura di un grafico siano relativamente stabili, una volta acquisite.

**D7.** **Il Signor Carlo scende dal tram all'incrocio di via *Pietro Micca* con via *20 Settembre* (nella mappa che vedi qui sotto il punto è contrassegnato da un asterisco).**


a. **Il Signor Carlo percorre 150 metri di via *20 Settembre* e, all'incrocio con via *A.G.I. Bertola*, svolta a destra risalendo fino all'incrocio con via *G. Botero*. Quanti metri all'incirca ha percorso in tutto?**

**Risposta**: ……………………….

b. **Qual è, all'incirca, la scala della mappa?**

- ☐ A. 1:60
- ☐ B. 1:600
- ☐ C. 1:6 000
- ☐ D. 1:60 000

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Errata | Corretta |
| D7_a | 11,9 | 57,6 | 30,5 |

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D7_b | 5,9 | 33,1 | 30,6 | 24,8 | 5,7 |

**AMBITO PREVALENTE**

Relazioni e Funzioni

**PROCESSO PREVALENTE**

**DOMANDA a:** riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e utilizzare strumenti di misura (*individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, stimare una misura,…*)

**DOMANDA b:** conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.

**RISPOSTE CORRETTE:**

**Domanda D7_a: 600 metri.**

Se con un righello si misura sulla mappa la lunghezza del tratto percorso in via XX Settembre, si trova circa 2,5 cm. Misurando il tratto percorso in via A.G.I. Bertola sulla mappa, si ottengono 7,4 cm, uguale a circa il triplo del tratto percorso in via XX Settembre. Poiché 2,5 cm sulla mappa (via XX Settembre) corrispondono a un tratto di 150 m, il tratto percorso in via A.G.I. Bertola è di circa 450 m.

Quindi il Sig. Carlo ha percorso all'incirca

150 m + 450 m = 600 m.

Si possono accettare anche risposte che vanno da 582 a 600 m.

**Domanda D7_b: C**

A 2,5 cm sulla mappa corrisponde un percorso di 150 m, ovvero di 15.000 cm.

Quindi a 2,5 cm corrispondono 15.000 cm, ossia, dividendo per 2,5, si ottiene una scala 1 : 6000.

**COMMENTO**

Per rispondere correttamente servono competenze legate ai cambiamenti di scala e di unità di misura. Si tratta di argomenti che trovano ampi spazi nella prassi didattica delle scuole secondarie di primo grado e che talvolta vengono dati per scontati nelle scuole secondarie di secondo grado. La percentuale di risposte corrette è inferiore al 30% per l'item a) e di poco superiore al 30% per l'item b). Ciò suggerisce che le competenze legate ai cambiamenti di scala e di unità di misura non siano ancora consolidate a livello di biennio.

Particolarmente insidioso appare il distrattore A (1:60) che si ottiene se non si trasforma la misura di 150 m in cm. Gli altri distrattori invece corrispondono a errori nella conversione di metri in cm.

Può anche darsi che molti studenti non conoscano il significato dell'espressione "1:60", che ha una struttura convenzionale (in un altro contesto potrebbe significare 1 cm a 60 m) e dunque costituisce una nozione (più che una competenza) che deve essere stata appresa appositamente a scuola. È probabile che molti studenti abbiano impostato la proporzione 2,5:150=1:$x$, arrivando alla conclusione (in qualche modo corretta) che 1 cm corrisponde a 60 m. Inspiegabile, se non in termini di errori sistematici di calcolo (conversione tra unità di misura omogenee e ordini di grandezza) il 30.6% di risposte B. Questo risultato, unito a quello di D5, e al successivo D8, potrebbe costituire una precisa indicazione a insistere maggiormente su stime di misura e ordini di grandezza nella scuola secondaria di I grado, e a riprendere costantemente (e mantenere viva) questa competenza nella scuola secondaria di II grado.

**D8.** **La dimensione di un televisore è la misura della diagonale dello schermo espressa in pollici (1 pollice = 2,54 cm). Nei televisori di nuova generazione il rapporto tra la larghezza e l'altezza dello schermo è 16:9.**

**a.** **Se la larghezza dello schermo di uno di questi televisori è circa 57,5 cm, qual è all'incirca la sua altezza?**

**Risposta:** ……………………. cm

**b.** **Da quanti pollici è il televisore?**

- ☐ A. 20 pollici (= 50,80 cm)
- ☐ B. 26 pollici (= 66,04 cm)
- ☐ C. 28 pollici (= 71,12 cm)
- ☐ D. 32 pollici (= 81,28 cm)

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Errata | Corretta |
| D8_a | 27,6 | 30,8 | 41,5 |

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D8_b | 13,6 | 16,8 | 43,4 | 11,7 | 14,5 |

**AMBITO PREVALENTE**

Spazio e Figure

**PROCESSO PREVALENTE**

Risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (*individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,…*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica

**RISPOSTE CORRETTE:**

**Domanda D8_a: 32,34 cm**

Si possono accettare anche 32 cm, 32,3 cm oppure 32,343 o con ancora più cifre dopo la virgola (risposte che potrebbero essere dovute probabilmente all'uso della calcolatrice).

Per rispondere a questa domanda occorre dividere la larghezza dello schermo per 16 e poi moltiplicare il risultato per 9: $57{,}5 \cdot \frac{9}{16} = 32{,}34...$ cm

**Domanda D8_b: B**

Per determinare la lunghezza della diagonale dello schermo occorre applicare il teorema di Pitagora. Chiamando *b* la larghezza dello schermo, *h* l'altezza dello schermo e *d* la lunghezza della diagonale, si ha:

$$d = \sqrt{b^2 + h^2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{9}{16}b\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{81}{256}b^2}$$

Quindi

$$d = b\frac{\sqrt{337}}{16} = 57{,}5 \cdot \frac{\sqrt{337}}{16} \approx 65{,}97 \text{ cm.}$$

che è circa 26 pollici.

Alla misura della diagonale si può arrivare anche usando direttamente il teorema di Pitagora sulle misure della larghezza e dell'altezza dello schermo.

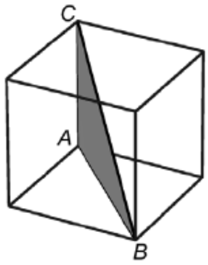
**COMMENTO**

Per rispondere bisogna essere in grado di applicare il teorema di Pitagora in una situazione concreta. Non è importante sapere convertire i pollici in centimetri ed è conveniente usare la calcolatrice.

Si tratta di un problema tipico della prassi didattica della scuola secondaria di primo grado, forse meno considerato oggi nella scuola secondaria di secondo grado, anche a causa del minor tempo che si dedica alla geometria rispetto a qualche anno fa.

La percentuale di risposte corrette supera quella delle risposte errate, ma vi è una percentuale rilevante di risposte mancanti, che suggeriscono difficoltà, da parte degli studenti, nel modellizzare anche situazioni relativamente semplici e in cui il modello matematico è, per così dire, trasparente.

**D9.** **Nella figura è rappresentato un cubo.**




**Il triangolo ABC ha come lati uno spigolo del cubo, la diagonale di una sua faccia e una diagonale del cubo.**

a. **Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.**

| | | Vera | Falsa |
|---|---|---|---|
| a1. | Il lato AB è uguale al lato AC | ☐ | ☐ |
| a2. | Il triangolo ABC è rettangolo | ☐ | ☐ |
| a3. | Il lato BC è il più lungo dei tre | ☐ | ☐ |
| a4. | L'angolo ABC è di 45° | ☐ | ☐ |

b. **Se lo spigolo del cubo misura 1 m, quanto misurano i lati del triangolo ABC?**

**AC = ……………………… m**

**AB = ……………………… m**

**BC = ……………………… m**

## Risultati in Italia

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Vero | Falso |
| D9_a1 | 1,3 | 45,4 | 53,3 |
| D9_a2 | 1,8 | 71,7 | 26,5 |
| D9_a3 | 1,3 | 86,9 | 11,8 |
| D9_a4 | 4,0 | 44,6 | 51,4 |

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Errata | Corretta |
| D9_b | 31,1 | 47,0 | 21,9 |

## AMBITO PREVALENTE

Spazio e Figure

**PROCESSO**

**DOMANDA a:** riconoscere le forme nello spazio (*riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, …*)

**DOMANDA b:** Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni

**RISPOSTE CORRETTE:**

**Domanda D9a_1: Falsa**

Infatti il lato AB, che è la diagonale di una faccia del cubo, non può essere uguale ad AC che è uno spigolo del cubo.

**Domanda D9a_2: Vera**

Infatti il triangolo ABC è rettangolo in A.

**Domanda D9a_3: Vera**

Infatti BC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC.

**Domanda D9a_4: Falsa**

Infatti il triangolo rettangolo ABC non è isoscele (AB è maggiore di AC).

**Domanda D9_b:** AC = 1 m; AB = $\sqrt{2}$ m; BC = $\sqrt{3}$ m

Si possono accettare anche valori approssimati

AB = 1,41 m oppure AB = 1,4 m

BC = 1,73 m oppure BC = 1,7 m

**COMMENTO**

L'elevata percentuale di risposte corrette agli item a_2 e a_3, rispetto agli item a_1 e a_4 suggerisce che molti studenti abbiano risposto osservando le misure dei segmenti sulla figura. Questa ipotesi è suggerita soprattutto dalla risposta errata data da molti studenti all'item a_1 che non avrebbe dovuto comportare problemi per chi vede nella figura una rappresentazione piana di un oggetto tridimensionale, visto che si tratta di confrontare il lato di un quadrato con la sua diagonale. Si noti che gli item a_1 e a_4 sono equivalenti: è naturale dunque che le percentuali di risposta siano simili. Chi ha sbagliato a_1 (perché "vede" un triangolo isoscele con lati uguali AB e AC) sbaglia anche a_4 perché "vede" uguali gli angoli alla base BC. Dunque la metà circa degli studenti si rappresenta mentalmente ABC come un triangolo rettangolo isoscele, non distinguendo tra il cubo (figura tridimensionale) e la sua rappresentazione piana mediante affinità e anzi affidandosi alla percezione visiva come motivazione alle risposte.

L'alto numero di risposte corrette ad a_2 è consolante: nonostante il triangolo ABC venga trasformato nella rappresentazione piana in un triangolo ottusangolo, molti studenti riconoscono che è un triangolo rettangolo, e dunque mostrano di distinguere tra una figura tridimensionale e la sua rappresentazione. L'alto numero di risposte corrette ad a_3 invece non è consolante, perché il lato BC resta il più lungo anche nella rappresentazione piana, e dunque buona parte delle risposte esatte potrebbero essere frutto di una percezione visiva sbagliata.

Sarebbe interessante vedere se molti studenti che hanno sbagliato la risposta all'item b) si sono limitati a misurare con il righello la misura dei segmenti AC, AB e BC.

Insieme a D2 e D3 questa domanda pone il problema della "raffigurazione mentale" di una figura: la scuola dovrebbe impegnarsi maggiormente su queste modalità di rappresentazione delle figure tridimensionali.

**D10. Qual è la metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ ?**

- ☐ A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$
- ☐ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$
- ☐ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$
- ☐ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D10 | 1,0 | 19,8 | 59,2 | 12,1 | 8,0 |

**AMBITO PREVALENTE**

Numeri

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D10: C.**

La metà di un numero si ottiene dividendolo per 2 oppure moltiplicandolo per 1/2. Pertanto la metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ è $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{50}=\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$

**COMMENTO**

La percentuale di risposte corrette è una delle più basse dell'intero fascicolo. Si tratta di un argomento tipico della prassi didattica della scuola secondaria di primo grado e della prima fase del primo anno di scuola secondaria di secondo grado: non stupisce quindi che la percentuale di risposte non date sia trascurabile. Invece l'elevatissima percentuale di risposte errate conferma quanto è noto alla ricerca didattica e cioè la difficoltà a lavorare simbolicamente con le potenze e, in particolare, con le potenze di numeri razionali. Gli studenti sembrano perdere il senso di quello che fanno, perché non riescono a trovare (o non cercano) strumenti di controllo. Questa impressione è confermata dall'alta percentuale di scelta dell'opzione a), in cui invece che il numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ è stato diviso per 2 il suo esponente.

I distrattori corrispondono a errori tipici nel calcolo con le potenze di un numero.

**D11.** **La relazione seguente esprime la spesa annuale per l'automobile, composta da una parte fissa e da una parte proporzionale al numero di km percorsi:**

$$S = F + c \cdot k$$

**dove $F$ sono le spese fisse, $c$ è il costo al km e $k$ è il numero di km percorsi.**

**Nella tabella sono riportate le spese fisse e il costo al km per alcuni tipi di automobile.**

| | **Auto A** | **Auto B** | **Auto C** | **Auto D** |
|---|---|---|---|---|
| Spese fisse $F$ | 900 euro | 580 euro | 650 euro | 1 200 euro |
| Costo al km $c$ | 0,25 euro/km | 0,33 euro/km | 0,27 euro/km | 0,31 euro/km |

**a.** **Se percorro 10 000 km all'anno, quale auto è più conveniente?**

☐ A. L'auto A

☐ B. L'auto B

☐ C. L'auto C

☐ D. L'auto D

**b.** **Il proprietario di un'auto di tipo A ha speso 3 000 euro in un anno. Quanti km ha percorso?**

**Risposta:** ……………………………….. km

**c.** **Se confrontiamo un'auto di tipo B con una di tipo D, possiamo dire che**

☐ A. è sempre più economico utilizzare l'auto di tipo B

☐ B. è sempre più economico utilizzare l'auto di tipo D

☐ C. l'auto di tipo B conviene fino a un certo numero di km annuali, oltre questo numero conviene l'auto di tipo D

☐ D. l'auto di tipo D conviene fino a un certo numero di km annuali, oltre questo numero conviene l'auto di tipo B

## Risultati in Italia

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D11_a | 2,1 | 16,1 | 16,9 | 61,2 | 3,7 |
| D11_c | 6,2 | 38,7 | 7,1 | 37,5 | 10,4 |

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Errata | Corretta |
| D11_b | 21,8 | 47,1 | 31,1 |

**AMBITO PREVALENTE**

Relazioni e Funzioni

**PROCESSO PREVALENTE**

Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (*individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,…*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico

**RISPOSTE CORRETTE:**

**Domanda D11_a: C**

Se percorro 10.000 km in un anno:

con l'Auto A la spesa è:

$S = 900 + 0{,}25 \cdot 10000 = 900 + 2500 = 3400$

Con l'auto Auto B:

$S = 580 + 0{,}33 \cdot 10000 = 580 + 3300 = 3880$

Con l'Auto C:

$S = 650 + 0{,}27 \cdot 10000 = 650 + 2700 = 3350$

E con l'Auto D:

$S = 1200 + 0{,}31 \cdot 10000 = 1200 + 3100 = 4300$

L'auto C, se percorro 10.000 km all'anno è la più conveniente.

I calcoli possono essere eseguiti anche mentalmente poiché si moltiplica per 10.000.

**Domanda D1_b: 8400 km**

Se il proprietario di un'auto A ha speso in un anno 3000 euro, allora si può scrivere l'equazione

$900 + 0{,}25 \cdot k = 3000$ .

Pertanto

$0{,}25 \cdot k = 2100$ , che implica $k = 8400$ km.

Si può rispondere anche senza risolvere esplicitamente un'equazione.

**Domanda D11_c: C**

Il confronto tra un'auto di tipo B e un'auto di tipo D, si può fare risolvendo la disequazione

$580 + 0{,}33 \cdot k \leq 1200 + 0{,}31 \cdot k$

che esprime la domanda "se *k* è il numero di *km* all'anno, per quali *k* il costo annuale di B è minore o uguale al costo annuale di D?"

Si ottiene

$0{,}02 \cdot k \leq 620$ ossia $0{,}01 \cdot k \leq 310$

che dà $k \leq 31.000$ km.

Quindi fino a 31000 km all'anno conviene un'auto di tipo B e oltre 31000 km all'anno conviene un'auto di tipo D. Se percorro 31.000 km all'anno, allora la scelta tra un'auto B e una D è indifferente.

Si può anche rispondere per tentativi, ad esempio pensando a 20.000 km per anno e poi provando a calcolare il costo anche per un valore doppio, e cioè 40.000 km.

Si sarebbe potuto anche rispondere notando che la pendenza della funzione lineare che rappresenta il costo dell'auto B (0,33 euro/km) è maggiore di quella che rappresenta il costo dell'auto D (0,31 euro/km). Quindi esiste un numero di km per cui il costo dell'auto B supera quello dell'auto D (si può verificare, anche per tentativi, che tale numero di km può essere percorso in un anno).

Non era richiesto di calcolare esattamente il valore al di sopra del quale la scelta di D diventava più conveniente.

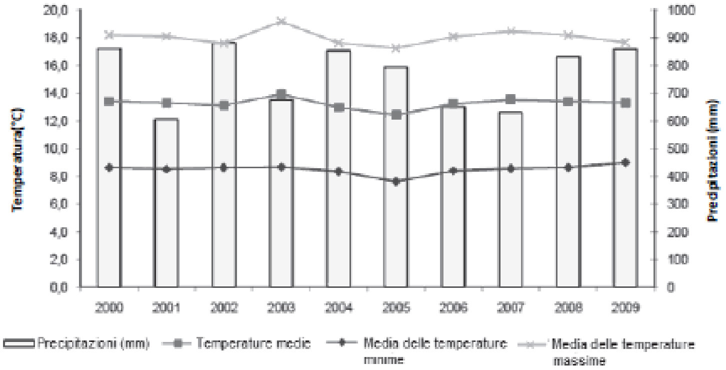
**COMMENTO**

Il quesito testa competenze di modellizzazione, in particolare uso di modelli lineari per effettuare scelte. Si può notare che la maggiore percentuale di risposte corrette si ha nell'item 11_a (sopra al 60%). Ciò non è strano, in quanto in esso richiedeva di eseguire una semplice espressione aritmetica che si poteva costruire moltiplicando il costo al km (fornito in tabella) per i numeri di km percorsi (10 000, dato fornito nel testo) e aggiungendo la spesa fissa (fornita in tabella). Il modello lineare $S = F + ck$ può anche rimanere implicito nel processo risolutivo: non è richiesto, per rispondere, di lavorare nel registro simbolico. Anche l'item 11_c poteva essere affrontato rimanendo interamente all'interno del registro numerico, ma poteva richiedere, in generale, qualche esplorazione numerica in più dell'item 11_b. La percentuale di risposte corrette scende, in questo caso, al di sotto del 40%.

L'item 11_b richiede, invece, il calcolo di $k$ a partire dalla conoscenza di $F$, $S$ e $c$ nella formula $S = F + ck$. È ovvio che in questo caso il lavoro nel registro simbolico diventa importante e le risposte corrette qui scendono al 31% e più del 20% non dà alcuna risposta.

**D12.** **Osserva il seguente grafico che rappresenta l'andamento delle temperature (scala a sinistra) e delle precipitazioni piovose (scala a destra) in Italia negli ultimi anni.**

**Figura 1.** **Media annua della temperatura media, massima e minima giornaliera e precipitazioni totali annue in Italia. Anni 2000-2009** ***(temperatura in gradi Celsius e precipitazioni in millimetri)***




**Indica per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa o se non si può ricavare dal grafico (metti una crocetta per ciascuna riga).**

| | | Vero | Falso | Non si può ricavare |
|---|---|---|---|---|
| **a.** | Nel decennio 2000-2009 la temperatura media annua è risultata più alta di 0,8 gradi rispetto al periodo 1971-2000 | ☐ | ☐ | ☐ |
| **b.** | L'anno 2003 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature massime | ☐ | ☐ | ☐ |
| **c.** | L'anno 2005 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature minime | ☐ | ☐ | ☐ |
| **d.** | L'anno in cui la media delle temperature massime è stata più alta è anche quello in cui le precipitazioni sono state minori | ☐ | ☐ | ☐ |
| **e.** | L'anno 2005 è quello in cui c'è stato il giorno più freddo | ☐ | ☐ | ☐ |
| **f.** | Il 2004 è stato l'anno più piovoso | ☐ | ☐ | ☐ |

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Vero | Falso | Non si ricava |
| D12_a | 2,6 | 7,5 | 4,6 | 85,3 |
| D12_b | 1,8 | 81,5 | 15,8 | 0,9 |
| D12_c | 2,1 | 36,6 | 59,6 | 1,8 |
| D12_d | 3,1 | 12,2 | 76,1 | 8,6 |
| D12_e | 2,7 | 39,8 | 13,7 | 43,9 |
| D12_f | 2,4 | 7,7 | 82,4 | 7,5 |

**AMBITO PREVALENTE**

Dati e Previsioni

**PROCESSO PREVALENTE**

Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (*descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...*).

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l’ausilio di rappresentazioni grafiche.

**RISPOSTE CORRETTE:**

**Domanda 12_a: Non si può ricavare**

Nella tabella abbiamo a disposizione alcuni dati riguardanti gli anni dal 2000 al 2009 e non possiamo ricavare alcunché sugli anni dal 1971 al 2000.

**Domanda 12_b: Vero**

Nell'anno 2003 si è registrato il valore più alto della media delle temperature massime.

**Domanda 12_c: Falso**

Nell'anno 2005 non si è registrato il valore più alto della media delle temperature minime (anzi, il 2005 è l'anno nel quale si è registrato il valore più basso della media delle temperature minime).

**Domanda 12_d: Falso**

L'anno in cui la media delle temperature massime è stata più alta è il 2003 e quello in cui le precipitazioni sono state minori è il 2001.

**Domanda 12_e: Non si può ricavare**

Sappiamo soltanto che il 2005 è stato l'anno in cui è stata più bassa la media delle temperature minime.

**Domanda 12_f: Falso**

Non è il 2004 l'anno più piovoso, ma il 2002.

**COMMENTO**

Gli studenti dimostrano, mediamente, buone competenze nella lettura di un grafico relativamente complesso: la doppia scala verticale (con indicazione a sinistra delle temperature e a destra delle precipitazioni) riferita a una stessa scala temporale, l'uso di rettangoli per indicare l'andamento delle precipitazioni e delle più classiche spezzate per indicare l'andamento delle temperature, il riferimento a tre grafici di temperatura (media, media delle minime e media delle massime) rende non banale la lettura del diagramma.

Le minori percentuali di risposte corrette sono state registrate per gli item 12_c e 12_e. Nel caso del 12_c può esserci stata un'interferenza tra i termini "più alto" e "minime" nella richiesta ("il più alto valore nella media delle temperature minime"). Nell'item 12_e molti studenti, dall'informazione che il 2005 è stato l'anno in cui è stata più bassa la media delle temperature minime, hanno concluso, in modo scorretto, che in quell'anno si è avuto il giorno più freddo.

D13. L'insegnante di inglese dà ai suoi studenti un test formato da 25 domande e spiega che il punteggio totale $p$ è calcolato assegnando 4 punti per ogni risposta esatta e togliendo 2 punti per ogni risposta sbagliata o mancante.

a. Il punteggio massimo possibile è ..........................

b. Scrivi la formula che fornisce il punteggio $p$ complessivo, indicando con $n$ il numero di risposte esatte.

$p$ = ..............................................

c. Se la sufficienza si ottiene con più di 60 punti, qual è il numero minimo di domande al quale occorre rispondere correttamente per avere la sufficienza?

Risposta: ...........................

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Errata | Corretta |
| D13_a | 5,0 | 6,0 | 89,0 |
| D13_b | 19,3 | 72,7 | 8,0 |
| D13_c | 10,2 | 78,5 | 11,3 |

**AMBITO PREVALENTE**

Relazioni e Funzioni

**PROCESSO PREVALENTE**

**DOMANDA a e c:** risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (*individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,…*)

**DOMANDA b:** Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (*verbale, scritta, simbolica, grafica, ...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi.

**RISPOSTE CORRETTE:**

**Domanda D13_a: 100**

Infatti per *n*= 25, si ottiene $p = 4 \cdot 25 = 100$

**Domanda D13_b:**

$p = 4n - 2(25 - n) = 6n - 50$

Va bene sia la risposta $p = 4n - 2(25 - n)$, ottenuta senza eseguire la moltiplicazione e senza ridurre i termini simili, sia la risposta $p = 6n - 50$.

**Domanda D13_c: 19.**

Infatti deve essere $6n - 50 \geq 60$.

Quindi $6n \geq 110$, da cui si ottiene $n \geq 18{,}333...$.

Il primo numero intero successivo al valore trovato è 19.

Il calcolo si può fare anche senza risolvere una disequazione. Basta procedere per tentativi e scoprire così che, per avere la sufficienza, il numero di quesiti esatti deve essere almeno 19.

**COMMENTO**

La percentuale di risposte esatte all'item D13_a è circa 90%. Ciò non sorprende, visto che si tratta di moltiplicare il punteggio di una risposta esatta per il massimo numero di risposte esatte che si possono dare al test. La percentuale di risposte esatte all'item D13_b è invece la più bassa dell'intero fascicolo: solo 8 studenti su 100 rispondono correttamente e 19 su 100 non rispondono. In questo caso si trattava di costruire un piccolo modello matematico, una funzione lineare che fornisce, per ogni numero di risposte esatte, il punteggio complessivo del test. Si arriva alla risposta costruendo una semplice espressione algebrica in cui la difficoltà maggiore è mettere in relazione il numero $n$ di risposte esatte con il numero $m$ di risposte errate o mancanti, conoscendo il numero totale delle domande. Sarebbe interessante esaminare un campione degli elaborati per verificare se davvero gli studenti che hanno sbagliato la risposta hanno incontrato difficoltà a esprimere, più o meno esplicitamente, la relazione $m = 25 - n$. Il risultato particolarmente sconfortante ottenuto dagli studenti italiani nel rispondere a questa domanda impone una seria riflessione sulla prassi didattica italiana che dedica larghissimo spazio, nel primo biennio di scuola secondaria di secondo grado, ad attività fini a se stesse di manipolazioni sintattiche di complicate espressioni: a che scopo tutto questo lavoro se gli studenti non sono in grado di scrivere e manipolare l'espressione $p = 4n - 2(25 - n)$ che lega il punteggio $p$ al numero $n$ di risposte esatte sapendo che per ogni risposta esatta vengono attribuiti 4 punti e che 25 sono state le domande proposte (nessun punto a risposte errate mancanti)?

Le risposte all'item 13_c sono andate leggermente meglio, ma ciò è comprensibile, perché la risposta poteva essere fornita anche senza costruire alcun modello e risolvere alcuna disequazione. Bastava procedere per tentativi e scoprire così che, per avere la sufficienza, il numero di quesiti esatti deve essere almeno 19.

**D14. L'insegnante chiede: "Se $n$ è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$ ?"**
**Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri".**
**Luisa risponde: "Si ottiene sempre un numero dispari".**
**Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3".**
**Chi ha ragione?**

- ☐ A. Tutti e tre
- ☐ B. Solo Mario
- ☐ C. Solo Luisa
- ☐ D. Solo Giovanni

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D14 | 2,1 | 14,6 | 8,4 | 68,0 | 6,9 |

**AMBITO PREVALENTE**

Relazioni e Funzioni

**PROCESSO PREVALENTE**

Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda 14: A**

$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 6n + 9 = 3(2n + 3)$.

Ciò che si ottiene, quindi, è il triplo del numero $2n + 3$. Trattandosi del triplo di un numero dispari, sia Giovanni, sia Luisa, sia Mario hanno ragione.

**COMMENTO**

Per rispondere, gli studenti avrebbero potuto:

a) utilizzare il calcolo letterale (un'addizione e una scomposizione mediante raccoglimento a fattor comune) riconoscendo nell'espressione $3(2n + 3)$ un numero dispari;
b) individuare, nei tre numeri dati, tre numeri dispari consecutivi e, pensando alla struttura della semiretta dei numeri naturali, riconoscere che la somma di tre numeri dispari consecutivi è il triplo del secondo numero.

La percentuale di risposte corrette è di poco inferiore al 15%. L'opzione C è stata quella più scelta: non è strano, perché si vede immediatamente che è corretta. Infatti lavorando nel frame "pari-dispari" gli studenti possono concludere immediatamente che Luisa ha ragione, perché la somma di tre numeri dispari è dispari. A questo punto molti studenti potrebbero avere pensato "poiché ho individuato una risposta corretta, le altre sono errate". Una lettura più meditata avrebbe suggerito di verificare anche la correttezza dell'opzione A. Probabilmente questo equivoco si è andato ad aggiungere alla poca abitudine della prassi didattica italiana di usare l'algebra e il calcolo letterale come strumento di rappresentazione, di dimostrazione e, più in generale come strumento di pensiero; tutto ciò ha portato a una percentuale di risposte corrette molto bassa.

Come per D4, anche in questo caso si poteva esplorare il problema assegnando a n i valori successivi 0, 1, 2, ... ottenendo per esempio una tabella del tipo

| n | 2n+1 | 2n+3 | 2n+5 | somma |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 5 | 9 |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 15 |
| 2 | 5 | 7 | 9 | 21 |
| 3 | 7 | 9 | 11 | 27 |
| 4 | 9 | 11 | 13 | 33 |
| 5 | 11 | 13 | 15 | 39 |
| 6 | 13 | 15 | 17 | 45 |
| 7 | 15 | 17 | 19 | 51 |
| 8 | 17 | 19 | 21 | 57 |
| 9 | 19 | 21 | 23 | 63 |
| 10 | 21 | 23 | 25 | 69 |

da cui si può verificare in modo empirico la correttezza di tutte le affermazioni. Ma questa fase (che richiede tempo) non è forse prassi didattica comune e dal contratto didattico lo studente non si sente autorizzato a indurre da casi particolari proprietà generali: ma l'esplorazione, anche di pochi casi, può mostrare subito se la proprietà è falsa, oppure dare indizi di plausibilità (e in certi casi, anche di verità).

**D15. Dividere un numero per 0,2 è lo stesso che moltiplicarlo per**

- ☐ A. $\frac{1}{5}$
- ☐ B. $\frac{1}{2}$
- ☐ C. 2
- ☐ D. 5

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D15 | 1,6 | 46,1 | 20,2 | 7,7 | 24,4 |

**AMBITO PREVALENTE**

Numeri.

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*).

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico.

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D15: D**

$a : 0{,}2 = a : (1/5) = a \cdot 5$

**COMMENTO**

Per rispondere è utile essere in grado di convertire la rappresentazione decimale di un numero razionale in frazione e ricordare che dividere un numero razionale $a$ per un numero razionale non nullo $b$ equivale a moltiplicare $a$ per l'inverso di $b$.

La scelta dell'opzione A può suggerire una lettura superficiale e affrettata del testo del quesito, ma se si considera che circa 2 studenti su 3 hanno scelto le opzioni A e B, allora la spiegazione più plausibile è che molti studenti siano ancora aggrappati al significato della divisione nell'insieme dei numeri naturali come ripartizione in un numero intero di parti uguali di una quantità. Il risultato di tale operazione, ovviamente, non può restituire un numero maggiore del dividendo; ciò potrebbe aver portato molti studenti a escludere le opzioni C e D.

In ogni caso, il fatto che circa 3 studenti su 4 diano una risposta scorretta suggerisce che molti studenti incontrino ancora seri ostacoli, anche dopo dieci anni di studi, nelle moltiplicazioni e divisioni con numeri razionali.

**D16. L'espressione $10^{37} + 10^{38}$ è anche uguale a**

- ☐ A. $20^{75}$
- ☐ B. $10^{7}$
- ☐ C. $11 \cdot 10^{37}$
- ☐ D. $10^{37 \cdot 38}$

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D16 | 2,4 | 35,0 | 1,9 | 22,0 | 38,7 |

**AMBITO PREVALENTE**

Numeri

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D16: C**

Possibile risoluzione: l'ordine di grandezza di $10^{37} + 10^{38}$ è $10^{38}$, quindi le opzioni A, B e D sono da escludere. Rimane quindi la C.

Altra possibile risoluzione:

$10^{37} + 10^{38} = 10^{37} + 10 \cdot 10^{37} = 10^{37}(1 + 10)$

$10^{37}(1 + 10) = 11 \cdot 10^{37}$ che è la risposta C.

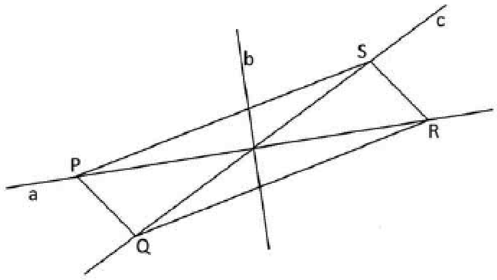
**COMMENTO**

Per rispondere, è possibile:

a) far riferimento all'ordine di grandezza dei numeri indicati nelle varie risposte;
b) manipolare simbolicamente, utilizzando la proprietà distributiva, l'espressione fornita nel testo della domanda.

La bassa percentuale di risposte corrette data a questa domanda, rafforza quanto già suggerito dalle risposte date alla domanda 10 precedentemente discussa: gli studenti incontrano serie difficoltà a lavorare simbolicamente con le potenze. In questo caso il maggior numero di risposte corrette rispetto a quelle date alla domanda 10 potrebbe dipendere dal fatto che qui si lavora con potenze di numeri naturali, in particolare, di 10, mentre la domanda 10 riguardava potenze di numeri razionali. In ogni caso la presenza di un numero così rilevante di risposte errate in domande che ricalcano esercizi tipici della prassi didattica, svolti sia nel primo, sia nel secondo ciclo di scuola secondaria, invita a una riflessione sull'opportunità didattica di molte attività di manipolazione simbolica fini a se stesse che sembrano avere come risultato, per tanti studenti, quello di inibire strumenti di controllo semantico (in questo caso più che sufficienti per determinare la risposta corretta).

**D17. Quale fra le rette *a*, *b* e *c*, nel piano della figura, è un asse di simmetria del parallelogramma PQRS?**




- ☐ A. La retta *a*
- ☐ B. La retta *b*
- ☐ C. La retta *c*
- ☐ D. Nessuna delle tre

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D17 | 3,3 | 4,5 | 43,0 | 5,8 | 43,5 |

**AMBITO PREVALENTE**

Spazio e Figure

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D17: D**

In generale un parallelogramma ha solo un centro di simmetria (il punto di incontro delle diagonali) e non ha assi di simmetria. Solo nel caso in cui sia un rettangolo (angoli uguali) o un rombo (lati uguali), allora un parallelogramma ha due assi di simmetria. Nel caso del parallelogramma di figura non si ha alcuna informazione che possa indurre a ritenere che esso sia un rettangolo o un rombo, quindi la risposta corretta è la D.

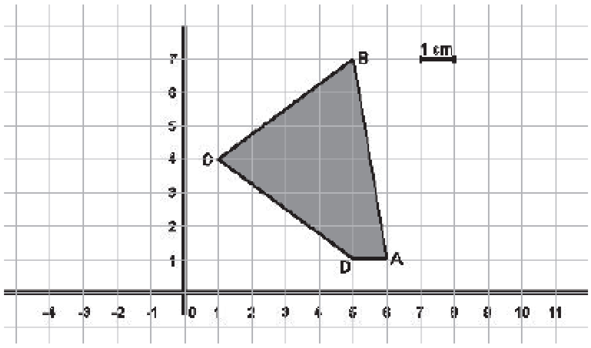
**COMMENTO**

Per rispondere è importante conoscere il significato di simmetria assiale e di asse di simmetria di una figura.

Purtroppo l'opzione D non consente di distinguere fra gli studenti che sanno che un parallelogramma, in generale, non ha assi di simmetria e gli studenti che pensano che un parallelogramma abbia come asse di simmetria la retta congiungente i punti medi di due lati opposti.

La quasi uguaglianza tra le percentuali di risposte B e D, oltre a segnalare un confortante 43,5% di studenti che risponde correttamente, può suggerire che alcuni studenti abbiano "visto" non una figura piana, ma la rappresentazione piana di una figura spaziale (anche se il testo, in modo molto accurato, lo precisa), dove il quadrilatero è un rettangolo e la retta *b* è perpendicolare al piano del rettangolo passante per il suo centro. In questo caso *b* sarebbe effettivamente un asse di simmetria della figura.

**D18.** **L'unità di misura riportata sugli assi cartesiani rappresenta 1 cm.**




**Calcola l'area del quadrilatero ABCD.**

**Risposta**: ……………………………… cm²

## Risultati in Italia

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Errata | Corretta |
| D18 | 33,6 | 37,7 | 28,7 |

**AMBITO PREVALENTE**

Spazio e Figure

**PROCESSO PREVALENTE**

Risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (*individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,…*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D18: 15 cm$^2$**

Basta considerare la figura da calcolare come differenza tra il rettangolo di vertici M(1;7), N(6;7), A(6;1), P(1;1) e i triangoli DPO, OMB e BNA. Si ottiene: $(30 - 6 - 6 - 3)$ cm$^2$ = 15 cm$^2$

Si potrebbe anche suddividere il quadrilatero ABCD in due triangoli ABD e BCD e calcolarne l'area:

**area (ABD) =** $\frac{(1 \cdot 6)}{2} = 3$ **area (BCD) =** $\frac{(6 \cdot 4)}{2} = 12$

La loro somma (3+12 =15) è l'area del quadrilatero (vedi anche D. Passalacqua: http://lnx.sinapsi.org/wordpress/2011/05/17/soluzioni-guidate-matematica-inv)

**COMMENTO**

Per rispondere è sufficiente conoscere quanto viene svolto nella scuola secondaria di primo grado relativamente ai poligoni equiscomponibili. Si tratta di esercizi tipici della prassi didattica della scuola secondaria di primo grado, ma anche degli ultimi anni della scuola primaria. Stupisce, quindi, l'elevato numero di risposte mancanti (1 studente su 3) e la bassa percentuale di risposte corrette (meno del 30%).

**D19. La seguente tabella riporta il peso alla nascita, suddiviso in 4 classi, di 30 neonati:**

| Classi di peso (in kg) | Numero neonati |
|---|---|
| Da 1 kg e fino a 2 kg | 7 |
| Più di 2 kg e fino a 3 kg | 8 |
| Più di 3 kg e fino a 4 kg | 12 |
| Più di 4 kg e fino a 5 kg | 3 |

**Quale delle seguenti espressioni devi usare per trovare il peso medio dei 30 neonati?**

☐ A. $\dfrac{1{,}5+2{,}5+3{,}5+4{,}5}{30}$

☐ B. $\dfrac{7+8+12+3}{4}$

☐ C. $\dfrac{1{,}5\cdot 7+2{,}5\cdot 8+3{,}5\cdot 12+4{,}5\cdot 3}{30}$

☐ D. $\dfrac{1{,}5\cdot 7+2{,}5\cdot 8+3{,}5\cdot 12+4{,}5\cdot 3}{4}$

## Risultati in Italia

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D19 | 2,6 | 14,7 | 14,5 | 59,4 | 8,8 |

**AMBITO PREVALENTE**

Dati e Previsioni

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D19: C**

Per calcolare la media di una grandezza continua suddivisa in classi di uguale ampiezza si determina il valore medio di ciascuna classe e poi si effettua la media ponderata:

$(1{,}5 \cdot 7 + 2{,}5 \cdot 8 + 3{,}5 \cdot 12 + 4{,}5 \cdot 3)/30$

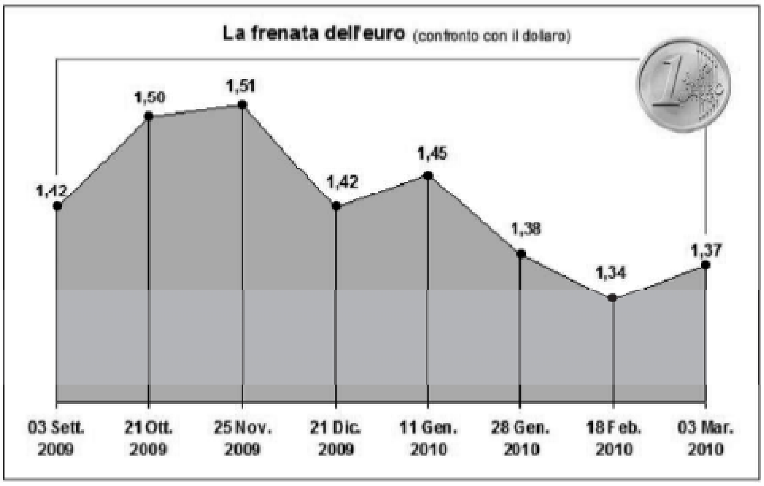
**COMMENTO**

Per rispondere lo studente deve calcolare la media di una grandezza quantitativa continua di cui è nota la distribuzione di frequenza rispetto a una suddivisione in classi di uguale ampiezza.

L'opzione A non tiene conto della frequenza assoluta relativa a ogni classe; la risposta B non prende in considerazione i valori della variabile di cui si vuole la media, ma le frequenze delle varie classi; la risposta D non tiene conto del numero totale di neonati su cui è stata effettuata la statistica.

È confortante che la percentuale di risposte corrette sia relativamente elevata, su una domanda che non è banale ed è significativa nell'economia dei nuovi curricula.

**D20.** **Il grafico rappresenta l'andamento del cambio euro-dollaro nel periodo 3 settembre 2009 - 3 marzo 2010.**




a. **In base al grafico in quale periodo mi sarebbe convenuto cambiare i miei euro in dollari per andare negli Stati Uniti?**

- ☐ A. Dal 3 settembre al 21 ottobre 2009
- ☐ B. Dal 21 ottobre al 25 novembre del 2009
- ☐ C. Dall'11 gennaio al 28 gennaio 2010
- ☐ D. Dal 18 febbraio al 3 marzo 2010

b. **Giustifica la tua risposta.**

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

c. **Se Maria il 18 febbraio 2010 cambia 1 000 euro in dollari, quanti dollari riceve in cambio?**

Risposta: ...................... dollari

d. **Sempre lo stesso giorno (18 febbraio), quanti euro deve cambiare Maria per avere 1 000 dollari?**

Risposta: ...................... euro

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D20_a | 4,8 | 4,2 | 68,0 | 4,8 | 18,2 |

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Errata | Corretta |
| D20_b | 25,7 | 25,6 | 48,7 |
| D20_c | 22,4 | 23,4 | 54,2 |
| D20_d | 29,4 | 33,7 | 36,9 |

**AMBITO PREVALENTE**

Numeri

**PROCESSO**

**DOMANDA a:** Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (*descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...*).

**DOMANDA b:** Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...*).

**DOMANDE c e d:** Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (*verbale, scritta, simbolica, grafica, ...*).

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi

**RISPOSTE CORRETTE:**

**Domanda D20_a: B**

**Domanda D20_b:** una qualunque risposta che affermi che conviene cambiare gli euro in dollari nel periodo di maggiore apprezzamento dell’euro rispetto al dollaro. Per esempio: “perché dal 21 Ottobre al 25 Novembre l’euro mantiene una valutazione (rispetto al dollaro) superiore a quella raggiunta in tutti gli altri periodi”.

Oppure “Il 25 novembre ottengo 1,51 dollari con 1 euro quindi ottengo il massimo numero di dollari con i miei euro”

**Domanda D20_c**: 1340 dollari

1,34 dollari/euro · 1000 euro = 1340 dollari

**Domanda D20_d: 746,27 euro**

1,34 dollari/euro · $x$ euro = 1000 dollari

$x$ = 1000/1,34 euro. Il risultato approssimato ai centesimi è 746, 27 euro.

**COMMENTO**

Per rispondere lo studente deve essere in grado di leggere un grafico che descrive la variazione di una grandezza nel tempo ed effettuare conversioni da un’unità di misura a un’altra.

Per la risposta all’item D20_a, la scelta di rappresentare periodi di tempo di diversa durata con segmenti di uguale lunghezza non è delle migliori, anche se è frequentemente utilizzata nelle informazioni di questo tipo presenti nei quotidiani. In ogni caso tale scelta non dovrebbe comportare problemi nel fornire la risposta all’item, perché dovrebbe essere chiaro che, per andare negli Stati Uniti, conviene cambiare gli euro in dollari nel periodo di maggior valore dell’euro rispetto al dollaro e questo è, senza alcuna ambiguità, il periodo 21 Ottobre – 25 Novembre in cui l’euro raggiunge il suo maggior apprezzamento rispetto al dollaro.

Un possibile e forte distrattore potrebbe essere fornito da un ragionamento dello studente che tenesse conto della possibilità di ricambiare, successivamente, i dollari in euro. In questo caso, qualche studente potrebbe essere tentato di scegliere l’opzione C. Naturalmente la risposta non può essere considerata corretta, perché dipenderebbe dal periodo scelto per il successivo cambio di dollari in euro e il testo della domanda non fornisce informazioni al riguardo. Un altro distrattore potrebbe consistere nel seguente ragionamento: nel periodo 21 Ottobre-25 Novembre il valore dell’euro sta aumentando rispetto al dollaro; quindi potrebbe non essere conveniente cambiare una moneta forte (gli euro) in una moneta che si sta deprezzando (il dollaro). Risulta però evidente che le informazioni fornite dal grafico dimostrano che una tale strategia, anche se ragionevole, sarebbe stata perdente, visto che nel periodo successivo il dollaro ha acquistato valore.

**D21.** **Quale fra le seguenti uguaglianze è corretta, qualunque sia il numero reale che sostituisce la $x$?**

- ☐ A. $\sqrt{x^2} = x$
- ☐ B. $\sqrt{x^2} = \pm x$
- ☐ C. $\sqrt{x^2} = |x|$
- ☐ D. $\sqrt{x^2} = \pm|x|$

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D21 | 3,9 | 49,2 | 25,4 | 16,8 | 4,7 |

**AMBITO PREVALENTE**

Relazioni e Funzioni

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D21: C**

**COMMENTO**

Per rispondere, lo studente deve riconoscere l'identità tra le due funzioni $\sqrt{x^2}$ e $|x|$.

Per definizione $\sqrt{x^2} = |x|$.

Le opzioni A, B e D costituiscono dei distrattori (forti soprattutto per A e per B).

L'opzione A non può però essere corretta, perché se $\sqrt{x^2} = x$ si dovrebbe necessariamente avere $\sqrt{(-2)^2} = -2$ e $\sqrt{(2)^2} = 2$ in contraddizione con il fatto che $\sqrt{(-2)^2}$ e $\sqrt{(2)^2}$ sono entrambe uguali a $\sqrt{4}$.

Analogamente le opzioni B e D non possono essere accettate, perché l'operazione di estrazione di una radice quadrata, quando possibile, è univoca, ossia dà un solo risultato.

L'elevata percentuale di risposte errate a questa domanda dipende sicuramente dalla difficoltà che comporta la gestione dei valori assoluti, soprattutto quando gli studenti non abbiano l'abitudine a usare i grafici per dare significato alle formule che scrivono. La prassi didattica italiana non è particolarmemnte incline a usare i grafici come veicoli di significato per le formule e questo crea indubbi disagi nella comprensione di oggetti complessi come i valori assoluti di grandezze variabili.

In particolare l'opzione A, che ha ricevuto quasi il 50% delle preferenze, suggerisce una certa superficialità nell'uso delle funzioni inverse: la funzione "$x^2$" non è invertibile su tutto R, perché non è biunivoca. Si sceglie quindi come intervallo di invertibilità quello dei numeri reali non negativi. Ciò vuol dire che la funzione inversa, ossia la radice quadrata, è definita sui numeri reali non negativi e assume valori su tale insieme. Se, invece, si definisse $\sqrt{x^2} = x$, la radice quadrata potrebbe assumere anche valori negativi. Tutti questi aspetti sono in genere poco evidenziati nella prassi didattica del biennio, dove l'oggetto "funzione" spesso non assume un ruolo e un'attenzione centrali. Ciò è probabilmente all'origine del disorientamento degli studenti di fronte a una domanda come la D21.

La scelta dell'opzione B può essere imputata ad automatismi nella risoluzione di equazioni di secondo grado come per esempio $x^2 = 4$. In genere gli studenti scrivono direttamente $x = \pm 2$ immaginando che tale risultato derivi dal passaggio $x = \sqrt{4} = \pm 2$.

Il passaggio corretto, invece è $|x| = 2$ da cui $x = 2$ o $x = -2$ .

**D22. Il polinomio $x^4 - 16$ è divisibile per**

☐ A. $x^2 - 8$

☐ B. $x - 4$

☐ C. $x + 2$

☐ D. $(x - 2)^2$

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D22 | 3,1 | 42,3 | 19,7 | 21,1 | 13,8 |

**AMBITO PREVALENTE**

Numeri

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo algebrico.

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D21: C**

$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x+2)(x^2 + 4)$

Quindi $x^4 - 16$ non è divisibile per $x^2 - 8$, né per $x - 4$ , né per $(x - 2)^2$ , mentre è divisibile per $x + 2$.

Le opzioni A e B avrebbero potuto anche essere escluse notando che gli zeri della funzione

$x^4 - 16$

(ossia 2 e – 2) non sono zeri della funzione $x^2 - 8$, né della funzione $x - 4$.

**COMMENTO**

Per rispondere alla domanda lo studente deve conoscere il concetto di divisibilità fra due polinomi. Può procedere direttamente con l'operazione di divisione, oppure utilizzare le tecniche di scomposizione in fattori.

È sorprendente che una domanda relativa a un argomento ampiamente trattato nelle attività del biennio delle scuole secondarie di secondo grado abbia ottenuto una percentuale di risposte esatte così bassa (solo 1 studente su 4 risponde correttamente). È vero che in genere l'argomento viene trattato nel primo anno di corso, ma il numero di esercitazioni in genere svolte e assegnate (anche come verifiche) sull'argomento avrebbe dovuto assicurare una prestazione migliore. Sembra quasi che gli studenti abbiano dimenticato, dopo un anno di lavoro su altri argomenti di algebra, un teorema che è fondamentale nel percorso del primo anno e che sta alla base della teoria delle equazioni. Ciò dovrebbe indurre a una riflessione sull'opportunità di certe scelte e prassi didattiche.

**D23. Le dimensioni di una piazza rettangolare di una grande città sono circa 620 m × 120 m. Le stime comparse sui giornali sul numero di partecipanti a una manifestazione che ha riempito la piazza variano da 100 000 a oltre 1 000 000.**

**a. Sapendo che diverse fotografie scattate durante la manifestazione evidenziano una densità di circa 4 persone al metro quadro, che cosa si può concludere circa l'effettivo numero dei partecipanti?**

☐ A. Le stime dei giornali sono tutte errate perché dalle informazioni disponibili i partecipanti non potevano essere più di 20 000.

☐ B. Una stima ragionevole è di circa 300 000 partecipanti.

☐ C. Ha ragione chi ha parlato di più di un milione di partecipanti.

☐ D. La piazza non può contenere molte persone più di uno stadio, quindi c'erano meno di 150 000 partecipanti.

**b. Mostra i calcoli che hai fatto per trovare la risposta.**

..............................................................................................................

..............................................................................................................

## Risultati in Italia

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D23_a | 17,6 | 18,9 | 46,3 | 7,1 | 10,0 |

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Errata | Corretta |
| D23_b | 43,6 | 21,6 | 34,8 |

**AMBITO PREVALENTE**

Numeri

**PROCESSO PREVALENTE**

Riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e utilizzare strumenti di misura (*individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, stimare il risultato di una misura,…*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo.

Per rispondere alla domanda lo studente deve essere in grado di effettuare stime numeriche e di conoscere le relazioni tra numerosità di una popolazione, area del territorio su cui si distribuisce e densità di quella popolazione relativa a quel territorio.

**RISPOSTE CORRETTE:**

**Domanda 23_a: B**

**Domanda 23_b:**

**$4 \cdot 74400 = 297600$**

**oppure**

**$4 = x / (620 \cdot 120)$, da cui $x = 4 \cdot 74400$**

**$x = 297600$**

**oppure**

**$(620 \cdot 120) \cdot 4 = 297600$**

**COMMENTO**

Le opzioni A e C rievocano le stime assai differenti, effettuate da soggetti diversi, che spesso compaiono sui quotidiani. L'opzione D si basa su un assunto apparentemente ragionevole, ma che non è contenuto nel testo della domanda e che non vale in generale. Il numero consistente di mancate risposte all'item D23_a e quello relativamente elevato di mancate risposte all'item D23_b conferma la difficoltà degli studenti italiani a lavorare con gli ordini di grandezza e le stime numeriche. Sembra che la prassi didattica italiana abbia poco effetto su quell'importante competenza nota come *senso del numero*, ossia la capacità di effettuare stime con calcoli rapidi, anche mentali e utilizzarle come strumento di controllo in alcuni problemi di manipolazione simbolica, soprattutto agli inizi, quando si è inesperti con il calcolo simbolico.

È però confortante notare che quasi la metà degli studenti risponde correttamente e circa i tre quarti di questi studenti sono in grado di motivare la risposta.

**D24.** **La formula $l = l_0 + k \cdot P$ esprime la lunghezza $l$ di una molla al variare del peso $P$ applicato. $l_0$ rappresenta la lunghezza in centimetri "a riposo" della molla; $k$ indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando si applica una unità di peso.**
**Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione:**
**"*È una molla molto lunga e molto resistente alla trazione*"?**

- ☐ A. $l = 15 + 0{,}5 \cdot P$
- ☐ B. $l = 75 + 7 \cdot P$
- ☐ C. $l = 70 + 0{,}01 \cdot P$
- ☐ D. $l = 60 + 6 \cdot P$

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D24 | 11,8 | 8,1 | 33,2 | 38,1 | 8,9 |

**AMBITO PREVALENTE**

Relazioni e Funzioni

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (*verbale, scritta, simbolica, grafica, ...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi.

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D24: C**

Innanzitutto è bene notare che bassi valori della pendenza delle funzioni lineari, ossia del coefficiente $k$, indicano grande resistenza alla trazione (a parità di peso $P$ la molla che si allunga meno è quella che ha il valore più basso di $k$); inoltre alti valori dell'intercetta delle funzioni lineari, ossia del parametro $l_0$, indicano molle lunghe.

Le molle modellizzate dalle relazioni

$l = 70 + 0{,}01P$

e

$l = 75 + 7P$

sono quindi le più lunghe, ma la seconda ha un valore di $k$ che è maggiore di quello di tutte le altre molle. Quindi è la molla meno resistente alla trazione.

Invece la molla modellizzata da

$l = 70 + 0{,}01P$

oltre a essere la seconda per lunghezza, è quella che resiste alla trazione più di tutte le altre. Quindi è quella che meglio si adatta alla descrizione fornita dal testo della domanda.

**COMMENTO**

Per rispondere alla domanda bisogna avere una certa confidenza con semplici modelli lineari di situazioni fisiche e saper associare, ai parametri "intercetta" e "pendenza" della funzione lineare che modellizza il fenomeno, le caratteristiche fisiche dell'oggetto osservato (in questo caso "lunghezza" e "resistenza alla trazione" della molla).

La scelta dell'opzione B (uno studente su 3) è probabilmente dovuta all'errata identificazione "alti valori di $k$, elevata resistenza alla trazione". Sarebbe stato sufficiente ragionare sulle conseguenze di questa affermazione per scartarla. In ogni caso anche questa domanda come la D11 e la D13 suggeriscono una attenzione non ancora sufficiente della prassi didattica all'uso di semplici modelli. Anche in questo caso, però, si deve considerare come nota positiva il fatto che quasi il 40% di studenti abbia risposto correttamente a un quesito non banale.

**D25.** **Per l'acquisto di un computer sono stati spesi 300 euro. Il prezzo è composto dal costo base più l'IVA, pari al 20% del costo base. Quanto è stato pagato di IVA?**

**Risposta:** ..................... euro

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | |
|---|---|---|---|
| | | Errata | Corretta |
| D25 | 15,2 | 72,5 | 12,2 |

**AMBITO PREVALENTE**

Relazioni e Funzioni

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico.

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D25: 50 euro**

$300 = x + (20/100)\,x$ da cui $x = 250$

Oppure

$300 = x + x/5$ da cui $x = 250$

Oppure

$300 = 1{,}2x$ da cui $x = 250$

In tutti i casi l'IVA è data da 300 – 250 = 50 euro

**COMMENTO**

Per rispondere lo studente deve sapere risolvere problemi diretti e inversi relativi al calcolo di percentuali. La capacità di costruire una equazione lineare utilizzando dati e richiesta del problema aiuta nella risoluzione. La percentuale di risposte corrette è inferiore al 15%.

Anche in questo, come in altri casi segnalati, la risposta può apparire a una prima analisi sorprendente: esercizi di risoluzione di equazioni e di semplici problemi di primo grado fanno parte della prassi didattica della scuola secondaria di primo grado e del primo anno della scuola secondaria di secondo grado; nonostante ciò solo uno studente su 8 risponde correttamente. Forse, però, c'è poca attenzione, nella prassi didattica, a trattare questo genere di problemi e, in particolare, a distinguere tra il calcolo del valore finale di una grandezza che aumenta del 20% (=prodotto per 1,2) e il calcolo del valore iniziale di una grandezza che è aumentata del 20% (=divisione per 1,2). Il passaggio dal *modello additivo* ($x$+20%$x$) al *modello moltiplicativo* ($1{,}2x$) deve essere oggetto specifico di didattica, se si vuole registrare un reale aumento di competenze in problemi di questo tipo. Inoltre è solo passando al modello moltiplicativo che si può comprendere il modello di crescite e decrescite esponenziali.

È anche possibile che, in questo caso, abbiano giocato un ruolo le difficoltà che alcuni studenti in genere incontrano con le percentuali.

**D26.** **Nelle prime due colonne di un foglio elettronico sono state calcolate alcune coppie di valori ($x$, $y$) di una funzione.**

| | A x | B y | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | |
| 2 | 2 | 1 | |
| 3 | 5 | 2 | |
| 4 | 10 | 3 | |
| 5 | 17 | 4 | |
| 6 | 26 | 5 | |
| 7 | 37 | 6 | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 11 | | | |

**Quale tra le seguenti è la funzione di cui sono stati calcolati i valori ($x$, $y$)?**

- ☐ A. $y = \sqrt{x} - 1$
- ☐ B. $y = \sqrt{x+1}$
- ☐ C. $y = \sqrt{x-1}$
- ☐ D. $y = 1 + \sqrt{x}$

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D26 | 6,9 | 10,9 | 18,0 | 53,5 | 10,7 |

**AMBITO PREVALENTE**

Relazioni e Funzioni

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (*verbale, scritta, simbolica, grafica, ...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D26: C**

Possibile risoluzione:

L'opzione A è da scartare, perchéla coppia (2; 1) non soddisfa l'equazione $y = \sqrt{x} - 1$ . Infatti 1 è diverso da $\sqrt{2} - 1$.

L'opzione B è da scartare, perché la coppia (1;0) non soddisfa l'equazione $y = \sqrt{x+1}$ . Infatti 0 è diverso da $\sqrt{2}$ .

L'opzione D è da scartare, perché la coppia (1;0) non soddisfa l'equazione $y = 1 + \sqrt{x}$ . Infatti 0 è diverso da 2.

Quindi l'unica opzione possibile è la C. Infatti l'equazione $y = \sqrt{x+1}$ è soddisfatta da tutte le coppie della tabella.

Oppure si potrebbe osservare che i valori della $x$ diminuiti di 1 sono quadrati perfetti e quindi l'opzione C è l'unica corretta (vedi anche D. Passalacqua:
http://lnx.sinapsi.org/wordpress/2011/05/17/soluzioni-guidate-matematica-inv)

Altra possibile risoluzione.

I dati della colonna $y$ variano con passo costante; le differenze prime della colonna $x$ variano linearmente e quindi le differenze seconde sono costanti. Allora la relazione che lega $x$ a $y$ è del tipo $x = ay^2 + by + c$

Imponendo la condizione di appartenenza dei punti (1; 0), (2;1) e (5; 2) si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} 1 = c \\ 2 = a + b + 1 \\ 5 = 4a + 2b + 1 \end{cases}$$ ossia, con pochi passaggi

$$\begin{cases} 1 = c \\ b = 1 - a \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$ e , infine, $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$

Si ha quindi $x = y^2 + 1$ che per $y$ non negativi (come sono i valori della tabella) equivale a

$y = \sqrt{x-1}$

**COMMENTO**

Per rispondere alla domanda lo studente deve essere in grado di effettuare conversioni tra due diversi registri di rappresentazione di una funzione: quello numerico, fornito mediante la tabella, e quello simbolico, fornito mediante la formula.

In particolare può limitarsi a sostituire, nelle formule date nelle varie opzioni, i valori numerici forniti nella tabella per riconoscere la scrittura simbolica che rappresenta correttamente i valori della tabella.

**D27.** **Carlotta, nel periodo di Natale, lavora come commessa in un negozio di calzature e guadagna 8 euro all'ora più una commissione del 5% sul ricavo totale delle scarpe che riesce a vendere. Quale formula esprime il suo guadagno *g*, se lavora *h* ore e vende scarpe per un valore totale di *s* euro?**

- ☐ A. $g = 8h + 0{,}05s$
- ☐ B. $g = 8h + 0{,}5s$
- ☐ C. $g = 5h + 8s$
- ☐ D. $g = 8h + 5s$

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D27 | 5,6 | 47,3 | 20,8 | 9,2 | 17,1 |

**AMBITO PREVALENTE**

Relazioni e Funzioni

**PROCESSO PREVALENTE**

Risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (*individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi …*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Individuare le strategie appropriate per la risoluzione di problemi

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D27: A**

Se Carlotta guadagna 8 euro all'ora, in *h* ore avrà un guadagno di 8*h* euro. Quindi l'opzione C è da scartare. Se, inoltre, Carlotta guadagna una commissione del 5% sul ricavo totale *s* delle scarpe che riesce a vendere, deve accrescere il suo guadagno di 8*h* euro con il guadagno 5*s*/100, ossia con 0,05*s*.

La risposta corretta è quindi $g = 8h + 0{,}05s$.

**COMMENTO**

Per rispondere alla domanda lo studente deve avere una certa confidenza con semplici modelli lineari e conoscere il significato di percentuale. Le risposte a questa domanda sono andate meglio delle risposte ad altre domande che richiedevano l'uso di semplici modelli lineari, per esempio rispetto alla D24, formalmente simile. Il risultato ha anche aspetti positivi: quasi la metà degli studenti risponde correttamente a una domanda non semplice. Le quattro risposte hanno tutte la stessa struttura, dunque le competenze richieste riguardano solo la giusta collocazione dei termini "8 euro all'ora" e "5% sui ricavi" nell'espressione $ah+bs$ al posto di $a$ e $b$. Se la risposta B può essere vista come un errore in fondo facilmente rimediabile, ben più preoccupanti sono quel 26,3% di risposte C e D: in questo caso gli studenti mostrano non tanto di sbagliare, quanto di non conoscere il significato del termine 5%, o perlomeno, di non averlo mai utilizzato in termini numerici.

**D28.** **In un torneo di calcio fra scuole una squadra guadagna 3 punti se vince, 1 punto se pareggia e nessun punto se perde. Una squadra ha vinto tante partite quante ne ha pareggiate. Quale dei seguenti punteggi <u>non</u> può aver totalizzato la squadra?**

- ☐ A. 24
- ☐ B. 28
- ☐ C. 30
- ☐ D. 32

**Risulati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D28 | 5,0 | 9,1 | 11,0 | 61,5 | 13,4 |

**AMBITO PREVALENTE**

Numeri

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*).

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D28: C**

Siano v le partite vinte e p le partite pareggiate. I punti fatti sono quindi 3v + p. Poiché p = v, allora i punti fatti sono 4p. Ciò vuol dire che il punteggio realizzato è un multiplo di 4. L'unico numero che non è multiplo di 4 è 30. Quindi 30 è l'unico punteggio che la squadra non può aver totalizzato.

**COMMENTO**

Per rispondere lo studente può modellizzare il problema con un'equazione, oppure lavorare direttamente sul campo di esperienza dei multipli.

Il risultato delle risposte a questa domanda è piacevolmente e sorprendentemente positivo. Può anche darsi che molti studenti abbiano testato le risposte per tentativi: con 7 partite si hanno 21+7=28 punti, con 8 partite 24+8=32 punti e dunque non è possibile realizzare 30 punti; ma si deve valutare positivamente questo procedimento, perché esso ha un alto contenuto di esperienza scientifica e rappresenta il punto di partenza imprescindibile per obiettivi più elevati.

**D29.** L'espressione $\frac{9}{10}+\frac{8}{10^2}+\frac{7}{10^4}+\frac{2}{10^5}$ si può rappresentare mediante il numero decimale

- ☐ A. 98,72
- ☐ B. 9,8072
- ☐ C. 0,9872
- ☐ D. 0,98072

**Risultati in Italia**

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D29 | 6,9 | 6,2 | 12,4 | 23,4 | 51,1 |

**AMBITO PREVALENTE**

Numeri

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (*verbale, scritta, simbolica, grafica, ...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D29: D**

L’espressione può essere scritta come

0,9 + 0,08 + 0,0007 + 0,00002 ossia 0,98072.

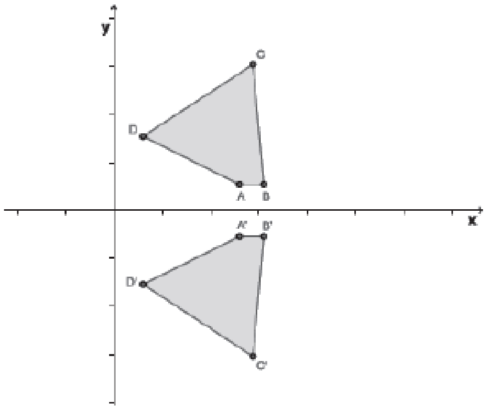
**COMMENTO**

Per rispondere è bene che lo studente abbia ben chiara la rappresentazione polinomiale (in base 10) di un numero razionale.

La scelta del distrattore C, che ha ottenuto la più alta percentuale di risposte fra quelle scorrette, può dipendere anche da una lettura affrettata della somma di frazioni. Chi ha scelto le opzioni A e B rivela invece poca capacità di controllo semantico.

Si può notare che la possibilità di utilizzare la calcolatrice numerica può aiutare considerevolmente nella risposta.

**D30.** **Il quadrilatero A'B'C'D' è ottenuto applicando al quadrilatero ABCD una trasformazione.**




**Di quale trasformazione si tratta?**

☐ A. Traslazione

☐ B. Simmetria rispetto all'asse $y$

☐ C. Simmetria rispetto all'asse $x$

☐ D. Rotazione attorno all'origine

## Risultati in Italia

| Item | Mancata risposta | OPZIONI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| D30 | 4,1 | 18,2 | 7,1 | 56,7 | 13,9 |

**AMBITO PREVALENTE**

Spazio e Figure

**PROCESSO PREVALENTE**

Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture...*)

**NUOVO OBBLIGO DI ISTRUZIONE**

Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni

**RISPOSTA CORRETTA:**

**Domanda D30: C**

È immediato osservare che i vertici dei due poligoni si corrispondono in una simmetria avente come asse quello delle *x*.

**COMMENTO**

Per rispondere è necessario conoscere il significato di simmetria (assiale e centrale). Il numero relativamente basso di risposte corrette a una domanda che non avrebbe dovuto comportare difficoltà potrebbe voler dire semplicemente che i termini delle trasformazioni geometriche *simmetria, traslazione,* ... non sono conosciuti dagli studenti, cioè questi argomenti non sono stati svolti a scuola; ma questo comporterebbe un numero significativo di mancate risposte, cosa che non accade. Ciò suggerisce che forse questi argomenti siano trattati con poca enfasi, qualitativa o quantitativa, tanto da non fornire conoscenze utili anche per una domanda in linea di principio così semplice.